Le cours – T° exp : Nombres complexes, forme algébrique

Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des **nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit **de manière unique sous la forme** $z = x + iy$ avec x et y réels.

- L'écriture $x + iy$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.

- Le nombre x s'appelle la **partie réelle** et le nombre y s'appelle la **partie imaginaire** de z. On note $\mathrm{Re}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$

Remarques : Si $y = 0$ alors z est un **nombre réel**. Si $x = 0$ alors z est un **nombre imaginaire pur**.

Conjugué d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe $z = x + iy$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $\bar{z} = x - iy$.

$$\bar{\bar{z}} = z \qquad z+\bar{z} = 2\Re(z) \qquad z-\bar{z} = 2i\Im(z) \qquad z\bar{z} = x^2+y^2$$

Si z est un nombre réel alors $\bar{z} = z$. Si z est un nombre imaginaire pur alors $\bar{z} = -z$.

$$\overline{z+z'} = \bar{z}+\overline{z'} \qquad \overline{z\times z'} = \bar{z}\times\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \ , \ z \neq 0 \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}} \ , \ z' \neq 0$$

Équations dans $\mathbb{C}$

Deux nombres complexes sont **égaux**, si et seulement si, ils ont la **même partie réelle et la même partie imaginaire**.
Un nombre complexe est **nul**, si et seulement si, **sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles**.

Méthode n°1
Quand cela est possible, on **isole l'inconnue z** :

$$3z + 5i = 4iz + 2 \Leftrightarrow (3-4i)z = 2 - 5i \Leftrightarrow z = \frac{2-5i}{3-4i} .$$

On donne la réponse sous forme algébrique : $z = \dfrac{2-5i}{3-4i} = \dfrac{(2-5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{26-7i}{25} = \dfrac{26}{25} - \dfrac{7}{25}i$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{26}{25} - \frac{7}{25}i\right\}$$

Méthode n°2
Dans cette deuxième méthode, **on pose** $z = x + iy$ et on cherche à déterminer les deux réels x et y. On peut toujours utiliser cette méthode, mais en pratique **on ne l'utilise que lorsque la méthode n°1 ne fonctionne pas**.

$$3z + 5i = 4iz + 2 \Leftrightarrow 3(x+iy) + 5i = 4i(x+iy) + 2 \Leftrightarrow 3x + 3iy + 5i = 4ix - 4y + 2 \Leftrightarrow 3x + i(3y + 5) = -4y+2 + 4ix$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} 3x = -4y+2 \\ 3y+5 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y = 2 \\ -4x+3y = -5 \end{cases} \text{ qui a pour solution } \begin{cases} x = \dfrac{26}{25} \\ y = -\dfrac{7}{25} \end{cases} \text{ et donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{26}{25} - \frac{7}{25}i\right\} .$$

Remarque : Les résolutions d'équations du **second degré dans $\mathbb{C}$** sont vues dans la section n°4 équations polynomiales.

Les méthodes – T° exp : Nombres complexes, forme algébrique