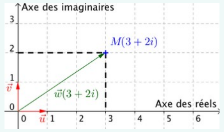
Le cours – T° exp : Nombres complexes, forme trigonométrique

Affixe d'un point ou d'un vecteur

A tout point $M(x\,;y)$, on associe le nombre complexe $z = x + i\,y$ appelé **affixe du point M**.
Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont **symétriques par rapport à l'axe des réels**.



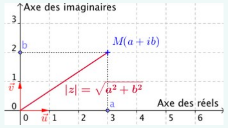
A tout vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans le plan complexe, on associe le nombre complexe $z = x + i\,y$.
On dit que $\vec{w}$ est le vecteur image de z et que z est l'**affixe du vecteur** $\vec{w}$.

Le **milieu** I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

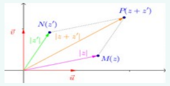
Module d'un nombre complexe

On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Si M est un point d'affixe z. Alors le module de z est égal à la **distance OM**.



$|z|^2 = z\bar{z}$ $\qquad |\bar{z}| = |z|$ $\qquad |-z| = |z|$ $\qquad |zz'| = |z||z'|$

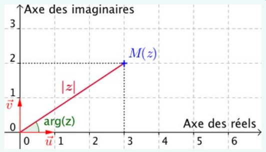
$|z^n| = |z|^n$ $\qquad \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ $\qquad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$



Inégalité triangulaire : soit z et z' deux nombres complexes. $|z + z'| \le |z| + |z'|$

Argument d'un nombre complexe

Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, notée **arg(z)** une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.



Un nombre complexe non nul possède une **infinité** d'arguments de la forme $arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On notera $arg(z)$ modulo 2π ou $arg(z)[2\pi]$.

z est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(z) = 0[\pi]$ $\qquad$ **z est un imaginaire pur** $\Leftrightarrow arg(z) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$arg(\bar{z}) = -arg(z)$ $\qquad arg(-z) = arg(z) + \pi$

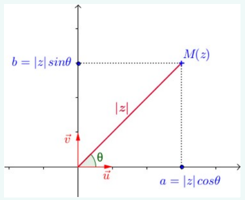
forme trigonométrique et forme exponentielle

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = arg(z)$

On a alors : $x = |z|\cos\theta$ et $y = |z|\sin\theta$ ou encore $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$

On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



Pour tout réel θ, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Tout nombre complexe z non nul de module $|z|$ et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = |z|e^{i\theta}$.

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ $\qquad e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ $\qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$

a) $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

b) $arg(z^n) = n \times arg(z)$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

c) $arg(\dfrac{1}{z}) = -arg(z)$

$\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

d) $arg(\dfrac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$

$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

e) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Les méthodes – T° exp : Nombres complexes, forme trigonométrique