Le cours – T° exp : Utilisation des nombres complexes

Avec les formes exponentielles

Pour tout réel θ, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Pour tout complexe non nul z tel que $z = |z|e^{i\theta}$, $|z|\cos(\theta) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $|z|\sin(\theta) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Formules d'addition et de duplication

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\sin(a)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$

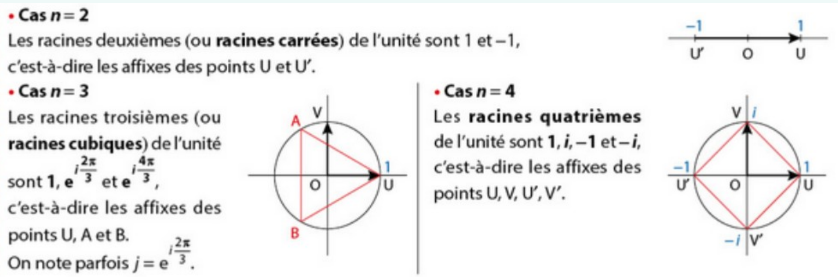
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Racines n-ième de l'unité

n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une **racine n-ième de l'unité** est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté U_n

Les racines n-ièmes de l'unité s'écrivent $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec k un nombre entier naturel, $0 \leq k < n$.
Ainsi, l'ensemble U_n compte n éléments.



• **Cas $n = 2$**
Les racines deuxièmes (ou **racines carrées**) de l'unité sont 1 et −1, c'est-à-dire les affixes des points U et U'.

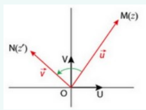
• **Cas $n = 3$**
Les racines troisièmes (ou **racines cubiques**) de l'unité sont **1**, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, c'est-à-dire les affixes des points U, A et B.
On note parfois $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

• **Cas $n = 4$**
Les **racines quatrièmes** de l'unité sont **1**, i, **−1** et $-i$, c'est-à-dire les affixes des points U, V, U', V'.

Interprétations géométriques

M et N sont deux points distincts de O d'affixes respectives z et z'. On a :

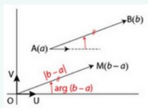
$(\overrightarrow{OU} ; \overrightarrow{OM}) = \arg(z)\ [2\pi]$ $\quad (\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OU} ; \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{OU} ; \overrightarrow{OM}) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$



Relation de Chasles : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non nuls, $(\vec{u} ; \vec{v}) + (\vec{v} ; \vec{w}) = (\vec{u} ; \vec{w})\ [2\pi]$

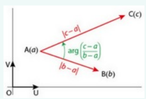
A et B sont deux points d'affixes respectives a et b.

$AB = |b-a|$ $\qquad$ Si $A \neq B$, alors $(\overrightarrow{OU} ; \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)\ [2\pi]$



A, B et C sont trois points d'affixes respectives a, b et c avec $a \neq b$ et $a \neq c$.

$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{|c-a|}{|b-a|}$ $\qquad (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$



Les méthodes – T° exp : Utilisation des nombres complexes