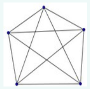
Le cours – T° exp : Les graphes

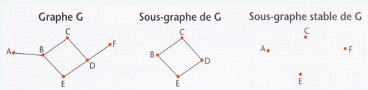
Définitions

On appelle **graphe** un ensemble de points, appelés **sommets**, reliés par des lignes, appelées **arêtes**. L'**ordre** d'un graphe est le **nombre total de ses sommets**. Une **boucle** est une arête qui relie un sommet à lui-même. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes **partant de ce sommet** (Une boucle compte pour 2 dans le degré). Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.

Un graphe **simple** est un graphe **sans boucle** et tel qu'entre deux sommets, il existe **au plus une arête**. Un graphe est un graphe **orienté** si les arêtes ont un sens de parcours. Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques sont adjacents. Dans un graphe **complet d'ordre n**, chaque sommet est **de degré n-1**.



Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe G' composé de certains sommets de G, ainsi que des arêtes qui relient ces sommets. On dit qu'un sommet d'un graphe est **isolé** lorsque aucune arête ne le relie aux autres sommets. On dit qu'un sous-graphe d'un graphe est **stable** lorsque ce sous-graphe ne contient aucune arête.



Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. On appelle **longueur d'une chaîne** le nombre d'arêtes qui composent cette chaîne. Une **chaîne fermée** est une chaîne dont l'**origine** et l'**extrémité** sont confondues. Si, de plus, elle est composée d'arêtes toutes distinctes, on dit que c'est un **cycle**.

Un graphe est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe. Dans un graphe connexe, on appelle **distance entre deux sommets** la longueur de la plus courte chaîne reliant ces sommets. Dans un graphe connexe, on appelle **diamètre du graphe** la plus grande distance entre deux sommets.

Une **chaîne (et un cycle) eulérienne** est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes :
- elle contient **toutes** les arêtes du graphe
- chaque arête n'est « décrite » qu'**une seule fois**.

Propriétés

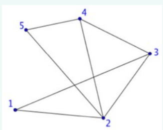
Dans un graphe **simple non-orienté**, **la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes**.
Dans un graphe **simple non-orienté**, **le nombre de sommets de degré impair est pair**.

Théorème d'Euler

Soit G un graphe **non-orienté connexe**.
- G admet un **cycle eulérien** si, et seulement si, **tous** les sommets de G sont de **degré pair**.
- G admet une **chaîne eulérienne** si, et seulement si, **deux sommets de G exactement sont de degré impair**. Dans ce cas, la chaîne est **d'extrémité ces deux sommets**.

Matrice d'adjacence

Soit un graphe G dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
On appelle **matrice d'adjacence** du graphe G (ou encore matrice associée au graphe G) la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient a_{ij} situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne correspond au nombre d'arêtes partant du sommet numéro i au sommet numéro j.



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'adjacence d'**un graphe simple** ne contient que des **0** et des **1**.
Dans le cas d'un **graphe non orienté**, la matrice d'adjacence est **symétrique** par rapport à sa diagonale principale.

Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G et soit n un entier naturel non nul.
Le coefficient de la matrice A^n situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au n**ombre de chaînes de longueur n reliant le sommet numéro i au sommet numéro j**.

Les méthodes – T° exp : Les graphes