Le cours – T° exp : Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Racines carrées dans $\mathbb{C}$

Soit a un **nombre réel**. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$ sont appelées **racines carrées** de a dans $\mathbb{C}$.

Tout nombre réel non nul a admet **deux racines carrées** dans $\mathbb{C}$:

Si $a > 0$, ce sont les nombres réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a < 0$, ce sont les nombres complexes $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** du trinôme az^2+bz+c, le nombre réel, noté Δ, égal à $\Delta = b^2-4ac$.

Si $\Delta > 0$: L'équation $az^2+bz+c=0$ a **deux solutions réelles** distinctes : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$: L'équation $az^2+bz+c=0$ a **une unique solution réelle** : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2+bz+c=0$ a **deux solutions complexes conjuguées** : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Polynômes de degré n et factorisations

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Les coefficients $a_n, a_{n-1}, \dots a_2, a_1, a_0$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$. Le nombre entier naturel n est le **degré du polynôme**. On peut étendre cette définition et considérer les polynômes à **coefficients complexes** de la variable complexe z.

Exemples : $P(z) = 2z^3 + 4z^2 + 2z$ est un polynôme de degré 3 à coefficients réels. $P(z) = (3+i)z^2 + 4iz + i - 1$ est un polynôme de degré 2 à coefficients complexes.

Factorisation de $z^n - a^n$:
a désigne un **nombre complexe**. Pour tout complexe z, $z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1})$

Factorisation connaissant une racine :
a est un nombre complexe. Si P est un polynôme tel que $P(a) = 0$ (a est une racine de P), alors on peut factoriser $P(z)$ par $z - a$, c'est à dire qu'il existe un polynôme Q tel que, pour tout complexe z, $P(z) = (z-a)Q(z)$.

Binôme de Newton

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour tous complexes z et z' et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z'^k = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} z' + \binom{n}{2} z^{n-2} z'^2 + \dots + \binom{n}{k} z^{n-k} z'^k + \dots + \binom{n}{n-1} z z'^{n-1} + z'^n$$

Les méthodes – T° exp : Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$