Le cours – T° exp : Nombres premiers

Nombres premiers

Un nombre entier **naturel** est **premier** s'il possède **exactement deux diviseurs positifs distincts 1 et lui-même**.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur positif.

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 et **non premier** admet un diviseur premier p tel que $\mathbf{2 \leq p \leq \sqrt{n}}$.

Il existe **une infinité de nombres premiers**.

Décomposition en facteurs premiers

Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 se décompose en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est **unique**.
On note $\mathbf{n = p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times \ldots \times p_r^{\alpha r}}$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_r$ nombres premiers distincts et α_1 , α_2 , ..., α_r entiers naturels non nuls.

> **Exemple :**
> On veut décomposer 600 en produit de facteurs premiers.
> $600 = 6 \times 100 = 6 \times 10^2 = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Soit $p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times \ldots \times p_r^{\alpha r}$ la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel n non nul.
Tout diviseur de n admet une décomposition en produit de facteurs premiers de la forme $\mathbf{p_1^{\beta 1} \times p_2^{\beta 2} \times \ldots \times p_r^{\beta r}}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Petit théorème de Fermat

p désigne un **nombre premier** et a un **nombre entier naturel non divisible par p**.

Alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p, c'est à dire $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

Conséquence :
p désigne un **nombre premier** et **a un nombre entier naturel**.

Alors $a^p - a$ est divisible par p, c'est à dire $a^p \equiv a [p]$

Les méthodes – T° exp : Nombres premiers