Le cours – T° exp : Suites de matrices

Exemples de suites de matrices colonnes

a) La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ et $v_n = 3n+1$.

b) Soit deux suites numériques couplées (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$, $v_0 = 4$ et
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 4 \end{cases}$$
On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On pose encore : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, la relation matricielle de récurrence : $U_{n+1} = AU_n + B$.

Relation explicite

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p telle que pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{U_{n+1} = AU_n}$ où A est une matrice carrée de taille p.
Alors, pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{U_n = A^n U_0}$.

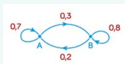
Convergence

On dit qu'une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p est **convergente** si les p suites dont les termes sont les p coefficients de (U_n) sont convergentes. La **limite** de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les p limites obtenues. Dans tous les autres cas, on dit que la suite est **divergente**.

(U_n) est une suite de matrices colonnes de taille p définie par la relation matricielle de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée de taille p et B est une matrice colonne à p lignes.
Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant l'égalité $\boldsymbol{U = AU + B}$.
La matrice U est appelée **état stable** de la suite (U_n) .

Chaîne de Markov

Une **chaîne de Markov** sur un espace d'états E est un processus (X_n) tel que :
- l'état du processus à l'étape $n+1$ **ne dépend que** de celui à l'état n, mais non de ses états antérieurs.
- la probabilité de passer de l'état i à l'état j **ne dépend pas** de l'instant n.



Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré dont la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet vaut 1. On appelle **probabilité de transition** la probabilité de passer d'un état i à un état j. La **matrice de transition M** associée à une chaîne de Markov est la matrice carrée dont le coefficient situé sur la l **igne i et la colonne j** est la probabilité de transition du sommet ***j* vers le sommet *i***.

La **matrice colonne des états P_n** d'une chaîne de Markov après n étapes est la matrice colonne dont les coefficients sont les **probabilités d'arrivée** en chaque sommet après n étapes.

On considère une chaîne de Markov de matrice de transition M et dont la matrice colonne des états à l'étape n est P_n .
Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{P_{n+1} = M P_n}$ et $\boldsymbol{P_n = M^n P_0}$.

__Remarque :__ Si on utilise des matrice **ligne** d'états P_n, la matrice de transition est la matrice carrée dont le coefficient situé sur la ligne **i et la colonne j** est la probabilité de transition du sommet ***i* vers le sommet *j***. Et on a alors : $P_{n+1} = P_n M$ et $P_n = P_0 M^n$.

On dit qu'une marche aléatoire de matrice de transition M est **convergente** si la suite des matrices colonnes (P_n) des états de la marche aléatoire converge. Si la suite (P_n) des états d'une marche aléatoire convergente vérifient $P_{n+1} = M P_n$ alors la limite P de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation $\boldsymbol{P = MP}$.

Les méthodes – T° exp : Suites de matrices