

APES – Chapitre n°1

Probabilités 1

probabilités conditionnelles et variables aléatoires 1^{ère} et T^{ale}

1 - Vocabulaire

Définition :

On appelle **expérience aléatoire** une expérience liée au hasard, dont les résultats sont connus, mais dont on ne sait pas à l'avance lequel de ces résultats va survenir.

Exemple : On lance une pièce de monnaie. On sait que l'on va obtenir Pile ou Face, mais on ne sait pas quel résultat on va obtenir.

Définition :

Lors d'une expérience aléatoire, on appelle **univers**, noté Ω , l'ensemble des résultats possibles, que l'on appelle **éventualités** ou **issues**.

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si on somme deux dés à 6 faces, $\Omega = \{2, 3, \dots, 11, 12\}$.

Définition :

On appelle **événement** un sous-ensemble de Ω .

Le vide, $\emptyset$, est l'événement **impossible**.

L'univers, Ω , est l'événement **certain**.

Une issue est un événement **élémentaire**.

Exemple : Lors d'un lancer de dé, « obtenir un nombre pair » est un événement.

Définition :

Soit A et B deux événements.

On appelle **réunion** de A et B , notée $A \cup B$, l'ensemble des issues appartenant à A ou à B .

On appelle **intersection** de A et B , notée $A \cap B$, l'ensemble des issues appartenant à A et B .

On appelle **complémentaire de A** ou événement contraire de A , noté $\bar{A}$, l'ensemble des issues de Ω qui n'appartiennent pas à A .

Exemple : On considère toujours un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note A l'événement « obtenir un nombre pair » et B « obtenir un multiple de 3 ». Alors $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, $\bar{B} = \{1, 2, 4, 5\}$.

Définition :

On considère un univers $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$. On appelle **loi de probabilité** l'association de n nombres $p_1, \dots, p_n$, compris entre 0 et 1, et vérifiant

$$p_1 + \dots + p_n = 1,$$

à chaque événement élémentaire $a_1, \dots, a_n$.

La probabilité d'un événement est alors la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

On note P cette probabilité et $P(a_i) = p_i$.

a_i	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
$P(a_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Propriété :

Soit P une probabilité sur Ω et A et B deux événements.

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Propriété :

Dans le cas d'équiprobabilité, chaque événement élémentaire a la même probabilité d'apparaître. Dans ce cas, la probabilité de A est égale à

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

2 - Probabilité conditionnelle

Définition :

Soit A un événement de probabilité non nulle. Soit B un événement.

On appelle **probabilité de B sachant A** c'est-à-dire sachant que A est réalisé, la quantité

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple : On lance un dé à 6 faces. A est l'événement « obtenir un nombre pair », B « obtenir un multiple de 3 ». La probabilité de B sachant A vaut alors $\frac{1}{3}$.

Définition :

Deux événements A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Cela signifie en particulier que $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire que la réalisation de A n'a aucune influence sur la réalisation de B .

Définition :

On appelle **partition** ou **système complet d'événements**, des événements $A_1, \dots, A_k$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- Pour tout $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $A_1 \cup \dots \cup A_k = \Omega$.

Propriété :

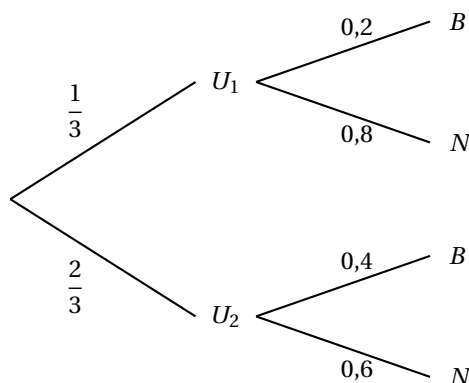
On considère A, B, C une partition de Ω . Alors, pour tout événement D , on a v

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D).$$

Exemple : On considère deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 8 boules noires. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 noires. On lance un dé à 6 faces. Si le nombre obtenu est un multiple de 3 alors on tire une boule de l'urne U_1 , sinon on tire une boule de l'urne U_2 .

On peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant. Le 0,2 est la probabilité conditionnelle $P_{U_1}(B)$.



Pour calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche, on multiplie les probabilités sur les branches menant à B , ce qui fournit la probabilité d'une intersection, et ensuite on les additionne.

SF 1.1 : Construire un arbre pondéré

À l'issue d'une compétition cycliste, des coureurs passent un contrôle antidopage. On estime que 25 % des cyclistes sont dopés. On sait qu'un cycliste dopé est contrôlé positif dans 90 % des cas, alors qu'un cycliste non dopé est contrôlé positif dans 8 % des cas.

On note D l'évènement « le cycliste est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

- 1) Donner $P(D)$, $P(\overline{D})$, $P_D(T)$ et $P_{\overline{D}}(T)$.
- 2) Construire l'arbre pondéré décrivant la situation.
- 3) Compléter les probabilités manquantes sur les branches.

Méthode :

Pour construire un arbre pondéré, on choisit l'ordre des étapes. Ici, on commence par l'état réel du cycliste, dopé ou non dopé, puis on indique le résultat du test.

SF 1.2 : Utiliser un arbre pondéré et la formule des probabilités totales

On reprend la situation du contrôle antidopage : $P(D) = 0,25$, $P_D(T) = 0,90$ et $P_{\overline{D}}(T) = 0,08$.

- 1) Calculer $P(D \cap T)$.
- 2) Calculer $P(\overline{D} \cap T)$.
- 3) En déduire $P(T)$.
- 4) Calculer $P_T(D)$, puis interpréter le résultat dans le contexte.

Méthode :

La probabilité demandée $P(T)$ se trouve en additionnant tous les chemins qui aboutissent à T . Pour calculer ensuite $P_T(D)$, on revient à la définition d'une probabilité conditionnelle : $P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$.

3 - Variable aléatoire

Définition :

Soit une expérience aléatoire, et soit Ω l'univers et P une probabilité sur cet univers.

- On appelle **variable aléatoire**, ou v.a., définie sur Ω , toute fonction X de Ω sur $\mathbb{R}$.
- La **loi de probabilité** de la v.a. X est l'ensemble des probabilités des événements $(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i que peut prendre la v.a. X .

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Définition :

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = P(X = x_i)$. L'**espérance mathématique** de X est le nombre noté $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i.$$

C'est la moyenne des valeurs prises par la v.a. X , pondérées par les probabilités qu'ont ces valeurs de se produire.
Un jeu tel que $E(X) = 0$ est dit équitable.

Exemple : Quelle est l'espérance du jeu précédent ?

Définition :

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité p_i .

La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre noté $V(X)$ tel que :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Et l'**écart-type** de X est le nombre noté $\sigma(X)$ tel que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type permet de mesurer la dispersion autour de son espérance des valeurs prises par la variable aléatoire.
Dans un jeu, l'écart-type mesure les « risques », en gain ou en perte, pris par le joueur.

SF 1.3 : Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

On mise 1 euro et on tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Si on a une paire d'as, on gagne 50 euros.
- Si on a une paire de figures, valet, dame ou roi, on gagne 10 euros.
- Si on a une autre paire, on gagne 5 euros.
- Si les deux cartes sont de la même couleur, on récupère notre mise.
- Dans tous les autres cas, la mise est perdue.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique lors d'un tirage.

1. Combien y a-t-il de mains de 2 cartes possibles ?
2. Calculer les probabilités de tirer une paire d'as, une paire de figures, etc. et donner la loi de probabilité de X .

SF 1.4 : Calculer une espérance, une variance et un écart-type

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,4

- 1) Calculer $E(X)$.
- 2) Calculer $V(X)$, en utilisant la formule de König-Huygens.
- 3) Donner une valeur approchée de $\sigma(X)$ au centième.

Méthode :

La formule $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ est souvent la plus rapide. On calcule d'abord $E(X)$, puis $E(X^2)$ en remplaçant chaque valeur x_i par son carré x_i^2 .

SF 1.5 : Utiliser l'espérance dans la résolution d'un problème

On lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat est 6, le joueur gagne 12 euros. Si le résultat est 1 ou 2, il gagne 3 euros. Dans tous les autres cas, il perd 4 euros. On note X le gain algébrique du joueur.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer $E(X)$.
- 3) Le jeu est-il favorable au joueur, défavorable au joueur ou équitable ?
- 4) Quel montant faudrait-il remplacer à la place de 12 euros pour rendre le jeu équitable ?

Méthode :

Pour savoir si un jeu est favorable, défavorable ou équitable, on calcule l'espérance de gain. Pour rendre le jeu équitable, on cherche la valeur inconnue qui rend l'espérance égale à 0.

Propriété :

Formule de Koenig-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple : Déterminer l'écart-type pour le jeu précédent.

Propriété :

On considère deux variables aléatoires X et Y .

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.
- $V(aX) = a^2 V(X)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.