

APES – Chapitre n°2

Polynômes

Polynômes du second degré 1^{ère}

1 - Second degré

Définition :

On appelle **polynôme du second degré**, ou **trinôme du second degré**, toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a , b et c sont des réels et $a \neq 0$.

On appelle **équation du second degré** une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$.

SF 2.1 : Reconnaître une fonction polynôme du second degré

Dire si les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré. Lorsque c'est le cas, donner les coefficients a , b et c .

1) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

2) $g(x) = 7x - 9$

3) $h(x) = (2x - 1)(x + 3)$

4) $p(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$

5) $q(x) = (x - 2)^2 - 49$

6) $r(x) = 3x^2 - (x + 1)(3x - 4)$

Théorème : Forme canonique

Tout polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut se mettre sous la forme canonique

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

On peut ainsi écrire

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Démonstration : Forme canonique

On part de $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

SF 2.2 : Écrire un polynôme du second degré sous forme canonique

Écrire chaque fonction sous forme canonique.

1) $A(x) = x^2 + 4x - 1$

2) $B(x) = 2x^2 - 4x + 6$

3) $C(x) = -x^2 + 2x + 5$

4) $D(x) = 3x^2 - x + 1$

Théorème : Résolution, signe et factorisation d'un trinôme du second degré

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** de l'équation le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le nombre de solutions dépend de la valeur de Δ .

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$. La fonction f est du signe de a sur $\mathbb{R}$, et $f(x)$ ne se factorise pas en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution, appelée **racine double**,

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

La fonction f est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, elle est nulle en x_0 , et

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La fonction f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines. De plus,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

Remarque : Il ne faut pas oublier le coefficient a dans la factorisation. Sinon, on peut obtenir un tableau de signes incorrect si l'on n'utilise pas directement le théorème.

SF 2.3 : Résoudre une équation du second degré avec le discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

2) $x^2 + 6x + 5 = 0$

3) $4x^2 + x + 5 = 0$

4) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

5) $8x^2 - 16x = 0$

6) $x^2 + 8x + 14 = 0$

SF 2.4 : Factoriser un trinôme du second degré

Factoriser, lorsque c'est possible dans $\mathbb{R}$, les trinômes suivants.

1) $f(x) = 3x^2 + 11x - 4$

2) $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

3) $h(x) = 4x^2 - 14x$

4) $p(x) = 9x^2 - 4$

5) $q(x) = x^2 + 4x + 4$

6) $r(x) = 6x^2 + x + 1$

SF 2.5 : Déterminer le signe d'un trinôme du second degré

Dans chaque cas, étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

1) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

2) $f(x) = -3x^2 + 4x + 7$

3) $f(x) = 6x^2 + x + 1$

Propriété : Sens de variation

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré.

Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$-\infty$	β	$-\infty$

Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$

Propriété : Représentation graphique

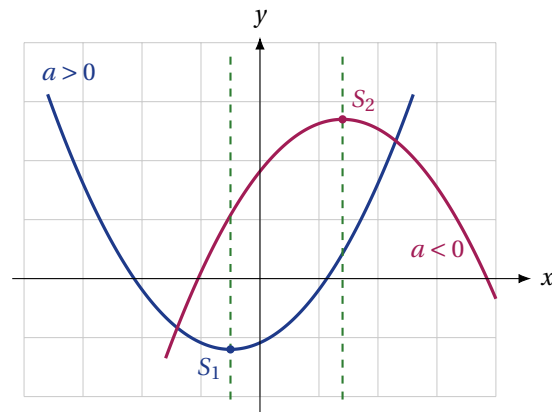
La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**. Elle possède un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.

Suivant le signe de a , la courbe présente un maximum ou un minimum en

$$x_0 = \alpha,$$

de valeur

$$y_0 = \beta.$$



SF 2.6 : Déterminer le sommet, l'axe de symétrie et les variations

Pour chaque fonction, déterminer la forme canonique, le sommet de la parabole, l'axe de symétrie et le tableau de variations.

1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

2) $g(x) = -x^2 - 2x + 8$

3) $h(x) = x^2 + 6x + 5$

4) $p(x) = -3x^2 + 12x - 7$

2 - Polynômes

Définition :

On appelle **fonction polynôme**, ou plus généralement **polynôme**, une fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, qui peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel et $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels.

Remarque : La fonction constante $x \mapsto 0$ est appelée **polynôme nul**.

On écrira souvent $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, ou de manière plus condensée $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Théorème : Unicité des coefficients

Si, pour tout réel x ,

$$a_n x^n + \dots + a_0 = 0,$$

alors $a_n = \dots = a_0 = 0$.

Remarque : Ce théorème permet de dire que si f est un polynôme non nul, alors il admet une écriture unique sous la forme $a_n x^n + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Sous cette écriture, on dit que f est ordonné suivant les puissances décroissantes de x .

Définition :

Soit f le polynôme $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$. L'entier n est appelé **degré du polynôme** f . Les nombres réels $a_0, \dots, a_n$ sont les **coefficients** du polynôme f . Le nombre a_0 est le **terme constant**. Le terme $a_n x^n$ est le **monôme de plus haut degré**.

Remarque : Le polynôme nul n'est pas de degré 0. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Propriété :

Si, pour tout réel x , les polynômes f et g sont égaux, alors f et g ont même degré et mêmes coefficients.

Définition :

On appelle **racine** du polynôme f tout nombre réel a tel que $f(a) = 0$.

Définition :

Soit f un polynôme et a un nombre réel. On dit que f est **factorisable par $x - a$** s'il existe un polynôme g tel que, pour tout réel x ,

$$f(x) = (x - a)g(x).$$

Remarque : Si le degré de f est n , alors celui de g est $n - 1$.

Exemple : Factorisation de $x^3 - 1$ par $x - 1$. Si g existe, alors il est de degré 2. On cherche donc des réels a, b et c tels que

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c. \end{aligned}$$

On identifie ensuite les coefficients de chaque puissance de x :

$$\begin{cases} a = 1 & \text{coefficient de } x^3, \\ b - a = 0 & \text{coefficient de } x^2, \\ c - b = 0 & \text{coefficient de } x, \\ -c = -1 & \text{termes constants.} \end{cases}$$

On obtient $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$, la dernière égalité constituant une vérification. Ainsi,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Théorème : Racine et factorisation

Soit f un polynôme et a un nombre réel. Alors

$$f(a) = 0 \iff f \text{ est factorisable par } (x - a).$$

Propriété :

On rappelle les identités remarquables nécessaires à la résolution des exercices :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b), \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$