

APES – Chapitre n°3

Dérivation et variations

Dérivation et variations de fonctions de 1^{ère} et Terminale

1 - Fonctions, variations et extremums

Définition : Vocabulaire des fonctions

Une fonction associe à chaque réel de son ensemble de définition au plus une image.

Si une fonction est notée f , on note D_f son **ensemble de définition**. Si $x \in D_f$ et $f(x) = y$, alors y est l'**image** de x par f , et x est un **antécédent** de y par f .

Définition : Fonction croissante, décroissante, constante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que f est **croissante sur I** signifie que, pour tous réels a et b de I , si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$.

Dire que f est **décroissante sur I** signifie que, pour tous réels a et b de I , si $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

Dire que f est **constante sur I** signifie que, pour tous réels a et b de I , on a $f(a) = f(b)$.

Définition : Maximum, minimum et extremum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

On dit que f admet un **maximum sur I en a** si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.

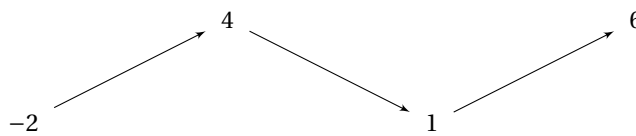
On dit que f admet un **minimum sur I en a** si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

Un maximum ou un minimum est appelé un **extremum**.

SF 3.1 : Lire des variations et des extremums

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-3	-1	2	5
$f(x)$	-2	4	1	6



- 1) Donner les intervalles sur lesquels f est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante.
- 2) Donner le maximum et le minimum de f sur $[-3; 5]$, ainsi que les valeurs de x où ils sont atteints.
- 3) Comparer, lorsque cela est possible, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$ et $f(5)$.

2 - Taux de variation et nombre dérivé

Définition : Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soient a et b deux réels distincts de I . On appelle **taux de variation de f entre a et b** le nombre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ce nombre est le coefficient directeur de la sécante à la courbe représentative de f passant par $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit $a \in I$. Lorsque le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en a** .

Ce nombre est appelé **nombre dérivé de f en a** . Il est noté $f'(a)$, et

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

On peut également écrire

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Propriété : Interprétation du nombre dérivé

Le nombre dérivé $f'(a)$ mesure le taux d'évolution instantané de f au voisinage de a .

Dans un problème de mouvement, si $d(t)$ désigne une distance, alors $d'(t_0)$ représente la vitesse instantanée à l'instant t_0 .

SF 3.2 : Calculer un nombre dérivé à partir de la définition

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

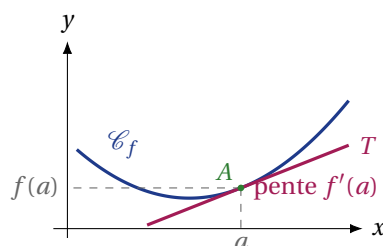
- 1) Pour $h \neq 0$, calculer et simplifier $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.
- 2) En déduire $f'(2)$.
- 3) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Méthode :

On développe $f(a+h)$, puis on simplifie le quotient avant de faire tendre h vers 0.

Définition : Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en a . La **tangente** à la courbe représentative de f au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété : Équation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en a . La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration : Équation de la tangente

La tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$, donc son équation est de la forme $y = f'(a)x + p$. Comme elle passe par $A(a; f(a))$, on a

$$f(a) = af'(a) + p.$$

Ainsi, $p = f(a) - af'(a)$, d'où

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Propriété : Approximation affine locale

Soit f une fonction dérivable en a . Pour x suffisamment proche de a ,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Équivalamment, pour h suffisamment proche de 0,

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$

SF 3.3 : Déterminer une tangente et utiliser une approximation affine

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- 1) Calculer $f(2)$ et $f'(2)$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
- 3) Utiliser cette tangente pour donner une valeur approchée de $2,01^2$.

3 - Fonction dérivée et dérivées usuelles

Définition : Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout réel de I . La fonction qui, à tout réel $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$, est appelée **fonction dérivée de f** et est notée f' .

Propriété : Tableau des dérivées usuelles

Les fonctions suivantes sont dérivables sur les intervalles indiqués.

Fonction	Expression de $f(x)$	Dérivable sur	Expression de $f'(x)$
Constante	$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Puissance	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Puissance négative	$f(x) = x^n, n < 0$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$

Remarque : La fonction racine carrée est définie en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Propriété : Somme, produit et quotient

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et soit $k \in \mathbb{R}$. Sur les intervalles où les expressions sont définies,

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

avec $v(x) \neq 0$ pour les deux dernières formules.

SF 3.4 : Calculer une dérivée avec les formules usuelles

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 7x - 1$

2) $g(x) = \frac{1}{x^4}$

3) $h(x) = x\sqrt{x}$

4) $p(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 3}$

Méthode :

On détermine d'abord l'ensemble sur lequel l'expression est dérivable, puis on choisit la formule adaptée : somme, produit, inverse ou quotient.

4 - Composition et compléments de Terminale

Définition : Fonction composée

Soient f et g deux fonctions. Lorsque $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$, on définit la fonction composée $g \circ f$ par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

L'ensemble de définition de $g \circ f$ est donc l'ensemble des réels $x \in D_f$ tels que $f(x) \in D_g$.

Propriété : Dérivées de fonctions composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle approprié.

Fonction	Conditions	Dérivée
$u^n, n \in \mathbb{Z}^*$	si $n < 0$, u ne s'annule pas	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$u > 0$ sur l'intervalle étudié	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	aucune condition supplémentaire	$(e^u)' = u'e^u$

SF 3.5 : Composer des fonctions et déterminer un ensemble de définition

Soient $u(x) = x^2$, $v(x) = 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$, et $w(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

- 1) Déterminer $(u \circ v)(x)$ et son ensemble de définition.
- 2) Déterminer $(v \circ u)(x)$ et son ensemble de définition.
- 3) Déterminer $(w \circ v)(x)$ et son ensemble de définition.
- 4) Déterminer $(v \circ w)(x)$ et son ensemble de définition.

SF 3.6 : Dériver des fonctions composées

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle où elle est dérivable.

1) $f(x) = (2x - 1)^5$

2) $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$

3) $h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

4) $p(x) = e^{3x^2 + 1}$

Méthode :

On repère une fonction intérieure u , puis on applique la formule adaptée. Par exemple, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ et $(e^u)' = u'e^u$.

5 - Dérivée et variations d'une fonction

Théorème : Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Réciproquement, si f est croissante sur I , alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Si f est décroissante sur I , alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Propriété : Construire un tableau de variations avec la dérivée

Pour étudier les variations d'une fonction dérivable f sur un intervalle I , on suit trois étapes.

- 1) On calcule $f'(x)$.
- 2) On étudie le signe de $f'(x)$ sur I .
- 3) On en déduit les variations de f sur I .

Exemple : Soit $f(x) = -x^2 + 6x + 1$. On a $f'(x) = -2x + 6$, donc $f'(x) > 0$ pour $x < 3$, $f'(3) = 0$, et $f'(x) < 0$ pour $x > 3$. Ainsi :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	10	$-\infty$

SF 3.7 : Étudier les variations d'une fonction avec sa dérivée

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée, étudier son signe et construire le tableau de variations sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ sur $[-3; 6]$.

3) $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$ sur $]2; +\infty[$.

4) $p(x) = e^{-x^2+4x}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition : Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit a un point intérieur à I .

On dit que f admet un **maximum local en a** si $f(a)$ est la plus grande valeur de f dans un voisinage de a . On définit de même un **minimum local**.

Propriété : Extremum local et nombre dérivé

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et soit $a \in I$.

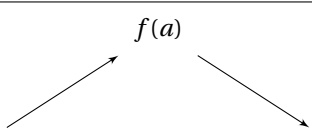
Si f admet un extremum local en a , alors

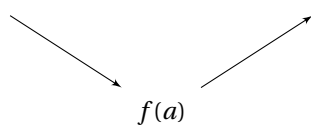
$$f'(a) = 0.$$

La réciproque est fautive : la fonction $x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais n'admet pas d'extremum en 0.

Propriété : Dérivée qui s'annule en changeant de signe

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a .

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

SF 3.8 : Déterminer des extremums et établir une inégalité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 7.$$

- 1) Calculer $f'(x)$, puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) En déduire que, pour tout réel x ,

$$x^2 - 4x + 7 \geq 3.$$

SF 3.9 : Étudier le signe d'une fonction grâce aux variations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 5x - 18.$$

- 1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) Calculer $f(2)$.
- 3) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
- 4) En déduire une inégalité valable pour tout $x \geq 2$.