

APES – Chapitre n°4

Suites numériques

1 - Définir une suite numérique

Définition :

De manière générale, définir une **suite numérique**, c'est associer à chaque entier naturel autorisé un nombre réel et un seul.

Autrement dit, une suite est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut écrire

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto u(n) = u_n.$$

Le nombre u_n se lit « u indice n ». Il est appelé le **terme de rang n** de la suite (u_n) .

Il faut distinguer u_n , qui est un nombre réel, de (u_n) , qui désigne la suite tout entière. On peut aussi noter une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \geq 0}$, ou préciser un autre rang de départ si nécessaire.

Exemple : La suite définie par $u_n = \sqrt{n-5}$ n'est définie que pour les entiers naturels $n \geq 5$. On peut la noter $(u_n)_{n \geq 5}$.

Définition Suite définie explicitement :

Une suite (u_n) est définie **explicitement** lorsqu'il existe une fonction f telle que, pour tout entier naturel n de l'ensemble de définition,

$$u_n = f(n).$$

Dans ce cas, chaque terme se calcule directement à partir de son rang, sans avoir besoin de connaître les termes précédents.

Exemple : Si $u_n = 1 - 2n$, alors $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_2 = -3$.

Définition Suite définie par récurrence :

Une suite (u_n) est définie **par récurrence** lorsqu'on donne un ou plusieurs termes initiaux, puis une relation permettant de calculer les termes suivants à partir des précédents.

Très souvent, la suite est donnée sous la forme

$$\begin{cases} u_0 = \text{valeur initiale}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour calculer un terme donné, il faut alors calculer successivement tous les termes qui le précèdent.

Exemple : Si $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$, alors $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $u_3 = -5$.

Remarque : Le terme initial n'est pas nécessairement u_0 . Une suite peut commencer à u_1 , u_2 , etc., suivant le contexte.

Propriété Décalage des indices dans une relation de récurrence :

Écrire, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2$$

signifie que chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par 3, puis en ajoutant 2. Lorsque les indices ont un sens, on peut donc aussi écrire $u_n = 3u_{n-1} + 2$ ou encore $u_{n+3} = 3u_{n+2} + 2$.

SF 4.1 : Calculer les termes d'une suite

- 1) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 1$. Calculer u_0 , u_1 , u_5 , puis exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- 2) On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 3$ et, pour tout entier naturel non nul n , par $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Calculer v_2 , v_3 et v_4 .
- 3) On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n , par $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$. Calculer les six premiers termes de la suite.

Méthode :

Pour une suite définie explicitement, on remplace directement n par le rang demandé. Pour une suite définie par récurrence, on calcule les termes dans l'ordre, sans sauter d'étape.

2 - Représentation graphique d'une suite

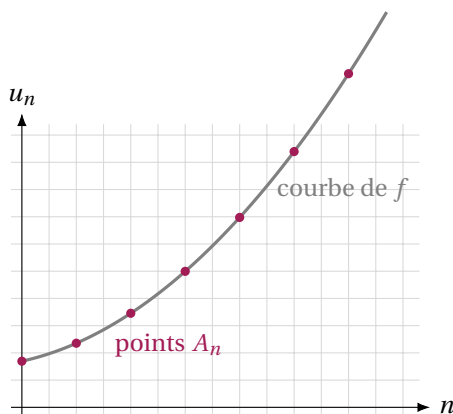
Propriété Représentation d'une suite explicite :

Pour représenter graphiquement une suite (u_n) , on place dans un repère les points de coordonnées

$$A_n(n; u_n).$$

La représentation graphique d'une suite est donc un **nuage de points**. On ne relie pas ces points entre eux, car une suite n'est définie que pour des valeurs entières de l'indice.

Si la suite est définie explicitement par $u_n = f(n)$, alors les points $A_n(n; u_n)$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction f , mais seulement pour les abscisses entières.



SF 4.2 : Représenter graphiquement une suite définie explicitement

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2 - n^2$.

- 1) Donner la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
- 2) Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
- 3) Tracer la courbe représentative de f , puis placer les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 correspondant aux quatre premiers termes de la suite.

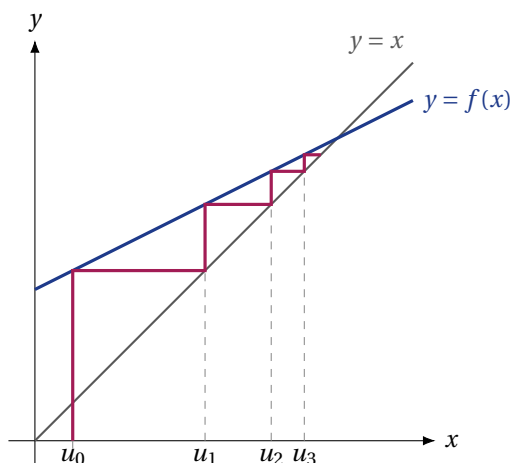
Méthode :

La courbe de la fonction associée est un support. La représentation de la suite reste constituée uniquement des points dont l'abscisse est un entier naturel.

Propriété Construction graphique avec la droite $y = x$:

Soit une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour construire graphiquement ses termes, on trace dans un même repère la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y = x$.

À partir de u_0 placé sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'à la courbe $\mathcal{C}_f$: l'ordonnée obtenue est $u_1 = f(u_0)$. On rejoint ensuite horizontalement la droite $y = x$, ce qui permet de reporter la valeur u_1 sur l'axe des abscisses. On recommence le même procédé pour obtenir u_2 , puis u_3 , etc.



Sur la figure, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et $u_0 = 0,5$. La construction permet de lire successivement u_1, u_2, u_3 , etc.

SF 4.3 : Construire graphiquement les termes d'une suite définie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

- 1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- 2) Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + 3$ et la droite d'équation $y = x$.
- 3) En partant de u_0 sur l'axe des abscisses, construire graphiquement u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- 4) Conjecturer le comportement de la suite lorsque n devient grand.

Méthode :

On alterne toujours un déplacement vertical jusqu'à la courbe $y = f(x)$, puis un déplacement horizontal jusqu'à la droite $y = x$. La droite $y = x$ sert à reporter la valeur obtenue comme nouvelle abscisse.

SF 4.4 : Utiliser un algorithme pour générer une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2}.$$

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme u_N .

Initialisation	$A \leftarrow \dots$ $N \leftarrow \text{rang demandé}$
Traitement	Pour i allant de 1 à N faire $A \leftarrow \dots$ Fin Pour
Sortie	Afficher A

- 3) Écrire une fonction Python permettant de calculer u_N .

SF 4.5 : Déterminer un rang à l'aide d'un algorithme

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = 1,08u_n + 2.$$

Écrire un algorithme puis un programme Python qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n > 100$.

Méthode :

Lorsque l'on cherche le premier rang pour lequel une condition est vérifiée, une boucle « tant que » est souvent plus adaptée qu'une boucle « pour ».

3 - Sens de variation d'une suite

Définition Suite croissante, décroissante et monotone :

Soit (u_n) une suite numérique.

La suite (u_n) est dite **croissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est dite **strictement croissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est dite **décroissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.

La suite est **constante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur l'ensemble des rangs considérés.

Théorème : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) , on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si, pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante à partir de ce rang.

Si, pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

Propriété Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

Lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Si $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$, donc la suite est croissante.

Si $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite est décroissante.

Cette méthode ne doit être utilisée qu'après avoir vérifié que les termes par lesquels on divise sont **strictement positifs**.

Théorème : Utiliser les variations d'une fonction associée

Supposons que la suite (u_n) soit définie explicitement par $u_n = f(n)$.

Si f est croissante sur un intervalle contenant tous les entiers à partir d'un rang n_0 , alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 .

Si f est décroissante sur un intervalle contenant tous les entiers à partir d'un rang n_0 , alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 .

SF 4.6 : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Déterminer le sens de variation des suites suivantes, en précisant si nécessaire à partir de quel rang le résultat est valable.

1) Pour tout entier naturel n , $u_n = n^2 - 3n + 1$.

2) Pour tout entier naturel n , $v_n = -2n + 5$.

3) Pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{n}{n+1}$.

Méthode :

On calcule $u_{n+1} - u_n$, puis on étudie son signe. Lorsque l'expression dépend de n , il faut préciser à partir de quel rang son signe ne change plus.

SF 4.7 : Choisir une méthode pour étudier les variations d'une suite

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite proposée en choisissant la méthode la plus efficace.

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $v_n = \frac{3}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) $w_n = n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) $t_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode :

La différence $u_{n+1} - u_n$ fonctionne dans presque toutes les situations. Pour une suite explicite, on peut aussi utiliser les variations de la fonction associée. Pour une suite à termes strictement positifs, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut parfois simplifier les calculs.

4 - Première approche de la notion de limite

Définition Suite convergente :

On s'intéresse au comportement d'une suite (u_n) lorsque le rang n devient de plus en plus grand.

Lorsqu'en augmentant indéfiniment n , les termes u_n se rapprochent aussi près que l'on veut d'un réel L , on dit que la suite (u_n) **converge vers L** .

Le réel L est appelé la **limite** de la suite. On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

Une suite qui admet une limite finie est dite **convergente**.

Exemple : Pour la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$, les premiers termes sont 3, 2,5, 2,333..., 2,25, 2,2, etc. Ils semblent se rapprocher de 2. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Définition Limite infinie et divergence :

Si les termes u_n deviennent aussi grands que l'on veut lorsque n augmente, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Si les termes deviennent aussi petits que l'on veut, on dit que la suite a pour limite $-\infty$ et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**. Elle peut diverger vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou ne pas avoir de limite du tout.

Exemple : La suite $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$. La suite $v_n = -n$ diverge vers $-\infty$. La suite $w_n = (-1)^n$ diverge sans avoir de limite, car ses termes alternent entre 1 et -1 .

Propriété Conjecturer le comportement d'une suite :

Pour conjecturer la limite éventuelle d'une suite, on peut calculer des termes de rang de plus en plus grand, construire un tableau de valeurs ou observer une représentation graphique.

n	1	2	5	10	50	100	500
$u_n = 3 - \frac{1}{n}$	2	2,5	2,8	2,9	2,98	2,99	2,998

Ce tableau permet de conjecturer que la suite semble converger vers 3. Une conjecture n'est cependant pas une démonstration.

Propriété Point fixe et suite définie par récurrence :

Lorsqu'une suite vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ et semble converger vers un réel ℓ , la représentation graphique avec la droite $y = x$ suggère que la limite éventuelle doit correspondre à un point où la courbe $y = f(x)$ rencontre la droite $y = x$.

On est donc naturellement conduit à rechercher les solutions de l'équation

$$f(x) = x.$$

Une telle solution est appelée un **point fixe** de la fonction f . Cette observation permet de formuler une conjecture, mais elle ne suffit pas, à elle seule, à démontrer la convergence de la suite.

SF 4.8 : Conjecturer la limite éventuelle d'une suite

Pour chacune des suites suivantes, calculer quelques termes de rang élevé, puis conjecturer son comportement.

- 1) $u_n = 4 - \frac{3}{n+1}$ pour tout entier naturel n .
- 2) $v_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n .
- 3) La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \sqrt{2w_n}$ pour tout entier naturel n .

Méthode :

On calcule les premiers termes, puis des termes de rang plus grand. Un tableur, une calculatrice, une représentation graphique ou un programme Python peuvent aider à observer le comportement de la suite.

SF 4.9 : Déterminer un seuil

- 1) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 4 - \frac{5}{n+1}$. Déterminer un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à moins de 0,01 de 4.
- 2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = n^2 - 4$. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 1000$.
- 3) Proposer, pour chacune des deux questions précédentes, un algorithme permettant de retrouver automatiquement le rang demandé.

SF 4.10 : Exploiter une représentation graphique avec la droite $y = x$

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \frac{x+6}{3}$.

- 1) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
- 2) Tracer les droites d'équations $y = f(x)$ et $y = x$, puis construire graphiquement les premiers termes de la suite.
- 3) À l'aide de la figure, conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite éventuelle.
- 4) Expliquer le lien entre la limite conjecturée et la solution de l'équation $f(x) = x$.