

APES – Chapitre n°5

Dénombrement et loi binomiale

1 - Principes de dénombrement

Définition - Ensemble fini, cardinal et ensembles disjoints :

Un ensemble E est **fini** lorsqu'il possède un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de E et se note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.

Par convention, $\text{Card}(\emptyset) = 0$. **Dénombrer**, c'est déterminer le cardinal d'un ensemble fini.

Deux ensembles sont **disjoints** lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun.

Propriété - Principe additif :

Si $E_1, E_2, \dots, E_r$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \dots + \text{Card}(E_r).$$

Définition - Produit cartésien et k -uplets :

Soient $E_1, E_2, \dots, E_k$ des ensembles finis. Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des k -uplets $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ tels que $a_i \in E_i$ pour tout i .

Lorsque les k ensembles sont égaux à un même ensemble E , on note E^k l'ensemble des k -uplets de E . Dans un k -uplet de E^k , les répétitions sont autorisées.

Propriété - Principe multiplicatif :

Pour des ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_k$,

$$\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \dots \times \text{Card}(E_k).$$

En particulier, si $\text{Card}(E) = n$, le nombre de k -uplets de E est

$$\text{Card}(E^k) = n^k.$$

Définition - Partie d'un ensemble :

Une **partie** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E . L'ensemble des parties de E contient toujours $\emptyset$ et E .

Propriété - Nombre de parties d'un ensemble :

Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors le nombre de parties de E est

$$2^n.$$

Démonstration : Nombre de parties d'un ensemble

Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. À chaque partie A de E , on associe le n -uplet de $\{0, 1\}^n$ dont la i -ième composante vaut 1 si $e_i \in A$, et 0 sinon. Cette correspondance est bijective. Il y a donc autant de parties de E que de n -uplets de $\{0, 1\}$, soit 2^n .

SF 5.1 : Utiliser les principes additif et multiplicatif

- 1) Un restaurant propose 5 entrées, 4 plats et 3 desserts. Combien de menus « entrée + plat + dessert » peut-on composer ?
- 2) Un mot de passe est formé de 2 lettres suivies de 4 chiffres. Les répétitions sont autorisées. Combien de mots de passe sont possibles ?
- 3) Une association propose 7 activités sportives et 5 activités culturelles, sans activité commune aux deux catégories. Combien de choix différents d'une seule activité sont possibles ?

Méthode : Choisir le bon principe

Si une situation se décompose en plusieurs **cas disjoints**, on additionne. Si elle se décompose en plusieurs **étapes successives**, on multiplie.

SF 5.2 : Dénombrer des k -uplets et des parties

- 1) Combien existe-t-il de suites de 6 chiffres prises dans $\{0, 1, \dots, 9\}$?
- 2) Un ensemble possède 8 éléments. Combien possède-t-il de parties ?
- 3) Expliquer pourquoi choisir une partie de $\{1, 2, \dots, 10\}$ revient à choisir un 10-uplet de $\{0, 1\}$.

2 - Arrangements et permutations

Définition - Factorielle :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la **factorielle** de n par

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple : $5! = 120$ et $8! = 40\,320$.

Définition - Arrangement :

Soit E un ensemble de cardinal n . Un **arrangement de k éléments de E** est un k -uplet d'éléments distincts de E .

Dans un arrangement, **l'ordre compte et les répétitions sont interdites**.

Propriété - Nombre d'arrangements :

Si $0 \leq k \leq n$, le nombre d'arrangements de k éléments parmi n est

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Définition - Permutation :

Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un arrangement de ses n éléments : tous les éléments sont utilisés une seule fois, et leur ordre compte.

Propriété - Nombre de permutations :

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est

$$n!.$$

SF 5.3 : Dénombrer des arrangements et des permutations

- 1) Parmi 12 coureurs, combien de podiums ordonnés « premier, deuxième, troisième » peut-on obtenir ?
- 2) De combien de façons peut-on ranger 8 livres différents sur une étagère ?
- 3) Combien de codes à 4 chiffres tous distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 si un code peut commencer par 0 ?

Méthode : Repérer un arrangement

On utilise un arrangement lorsqu'on choisit k éléments parmi n , sans répétition, et que l'ordre des éléments choisis compte. Si tous les éléments sont utilisés, il s'agit d'une permutation.

3 - Combinaisons et coefficients binomiaux

Définition - Combinaison :

Soit E un ensemble de cardinal n , et soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Une **combinaison de k éléments de E** est une partie de E comportant exactement k éléments.

Dans une combinaison, **l'ordre ne compte pas** et un élément ne peut être choisi qu'une seule fois.

Propriété - Nombre de combinaisons :

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est le **coefficient binomial**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

En particulier,

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Démonstration : Formule donnant $\binom{n}{k}$

On compte d'abord les arrangements de k éléments parmi n : il y en a $\frac{n!}{(n-k)!}$. Une même partie à k éléments donne exactement $k!$ arrangements, correspondant aux $k!$ ordres possibles de ses éléments. Ainsi,

$$k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

d'où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Propriété - Symétrie des coefficients binomiaux :

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Propriété - Somme des coefficients binomiaux :

Pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration : Somme des coefficients binomiaux

Pour chaque entier k compris entre 0 et n , $\binom{n}{k}$ compte les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. La somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ compte donc toutes les parties de cet ensemble. Or il y en a 2^n .

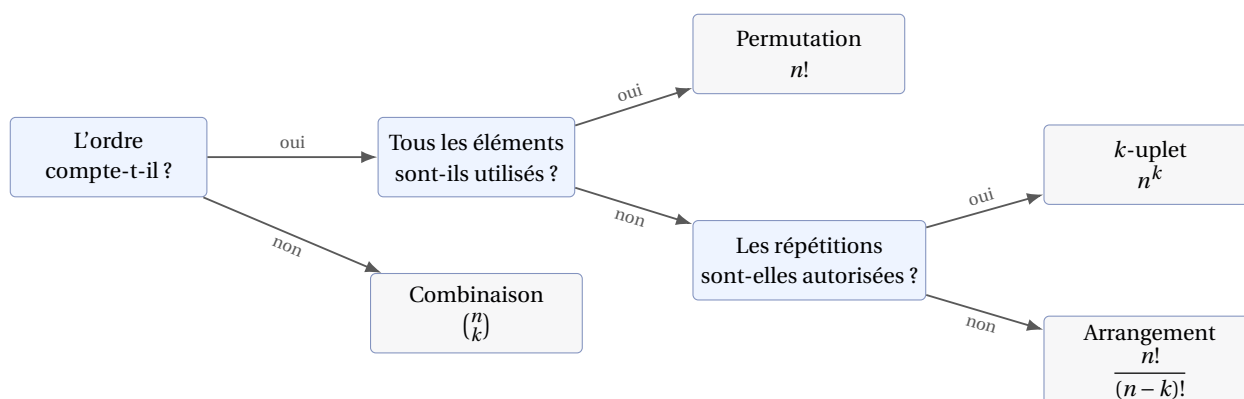
SF 5.4 : Calculer et utiliser des combinaisons

- 1) Calculer $\binom{8}{3}$, $\binom{10}{8}$ et $\binom{15}{2}$.
- 2) Une classe de 32 élèves élit 3 représentants ayant tous le même rôle. Combien de groupes de représentants peut-on former ?
- 3) Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes contiennent exactement 2 as ?

Méthode : Identifier une combinaison

On utilise une combinaison lorsqu'on choisit des éléments **sans ordre**. La question à se poser est : « si j'échange deux éléments choisis, est-ce que j'obtiens un nouveau résultat ? » Si la réponse est non, une combinaison est généralement adaptée.

Choisir le bon modèle de dénombrement



SF 5.5 : Choisir une méthode de dénombrement

Pour chacune des situations suivantes, préciser d'abord le modèle adapté, puis effectuer le dénombrement.

- 1) Former un code de 5 lettres avec répétitions autorisées.
- 2) Désigner un président, un trésorier et un secrétaire parmi 14 personnes.
- 3) Choisir 3 personnes parmi 14 pour former une commission sans rôle particulier.
- 4) Ranger 9 personnes sur une ligne.

4 - Triangle de Pascal

Propriété - Relation de Pascal :

Pour tout entier naturel n et tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

De manière équivalente, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Démonstration : Relation de Pascal

Soit E un ensemble de $n+1$ éléments et choisissons un élément particulier $a \in E$. Pour former une partie de E à $k+1$ éléments, deux cas disjoints sont possibles : la partie contient a , auquel cas il reste à choisir k éléments parmi les n autres, ou elle ne contient pas a , auquel cas on choisit $k+1$ éléments parmi les n autres. Ainsi,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Définition - Triangle de Pascal :

La relation de Pascal permet de construire les coefficients binomiaux ligne par ligne. La première et la dernière valeur de chaque ligne sont égales à 1, et chaque terme intérieur est la somme des deux termes situés au-dessus.

	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	3	3	1				
$n = 4$	1	4	6	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1

SF 5.6 : Utiliser la relation de Pascal et le triangle de Pascal

- 1) Compléter les lignes $n = 6$ et $n = 7$ du triangle de Pascal sans utiliser la formule avec les factorielles.
- 2) En déduire $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{4}$ et $\binom{8}{3}$.
- 3) Vérifier la relation de Pascal pour $n = 7$ et $k = 3$.

5 - Binôme de Newton

Théorème : Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a et b , et pour tout entier naturel n ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Autrement dit,

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n.$$

Démonstration : Formule du binôme de Newton

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, la formule donne $(a + b)^0 = 1$.

Supposons la formule vraie pour un entier n . Alors

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Après décalage d'indice dans la seconde somme et regroupement des termes de même degré en b , la relation de Pascal donne

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n .

Propriété - Conséquences utiles :

En prenant $a = b = 1$, on retrouve

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

En prenant $a = 1$ et $b = -1$, pour $n \geq 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Exemple : Avec la ligne $n = 5$ du triangle de Pascal,

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

SF 5.7 : Développer avec le binôme de Newton

- 1) Développer $(x + 2)^5$.
- 2) Développer $(2x - 1)^4$.
- 3) Déterminer le coefficient de x^4 dans le développement de $(1 + x)^9$.
- 4) Déterminer le coefficient de x^6 dans le développement de $(2 + x)^8$.

Méthode : Trouver un terme particulier

Dans $(a + b)^n$, le terme d'indice k est $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Pour chercher un coefficient précis, on identifie la valeur de k qui fournit la puissance demandée.

6 - Épreuve et schéma de Bernoulli

Définition - Épreuve de Bernoulli :

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues :

- un **succès** S , de probabilité p ;
- un **échec** $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$.

La variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** .

Propriété - Loi de Bernoulli :

Si Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors

y	0	1
$P(Y = y)$	$1 - p$	p

et

$$E(Y) = p, \quad V(Y) = p(1 - p).$$

Définition - Schéma de Bernoulli :

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, chacune ayant une probabilité de succès égale à p .

SF 5.8 : Reconnaître et modéliser un schéma de Bernoulli

Pour chacune des situations suivantes, dire si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli. Lorsque c'est le cas, préciser le succès, n et p .

- 1) On lance 12 fois un dé équilibré et on compte le nombre de six obtenus.
- 2) On tire successivement 5 cartes sans remise dans un jeu de 32 cartes et on compte le nombre d'as.
- 3) On interroge 20 personnes choisies indépendamment dans une population où 35% des individus possèdent une caractéristique donnée.

Méthode : Reconnaître un schéma de Bernoulli

Il faut vérifier trois points : chaque épreuve n'a que deux issues retenues, la probabilité de succès reste la même à chaque répétition, et les répétitions sont indépendantes.

7 - Loi binomiale

Définition - Loi binomiale :

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus au cours des n épreuves.

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , et on note

$$X \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Les valeurs possibles de X sont $0, 1, \dots, n$.

Théorème : Probabilité d'obtenir exactement k succès

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration : Formule de la loi binomiale

Un chemin comportant exactement k succès et $n - k$ échecs a, par indépendance, la probabilité

$$p^k (1-p)^{n-k}.$$

Il reste à compter le nombre de chemins possédant exactement k succès. Choisir leurs positions revient à choisir k positions parmi n , ce qui peut se faire de $\binom{n}{k}$ façons. Les événements correspondant à ces chemins sont disjoints, donc leurs probabilités s'additionnent. Ainsi,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Propriété - Espérance, variance et écart-type :

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

L'espérance np représente le nombre moyen de succès attendu lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois dans les mêmes conditions.

Propriété - Probabilités cumulées :

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

On utilise souvent le complémentaire pour calculer une probabilité « au moins » :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1).$$

De même,

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1).$$

Exemple : On lance 10 fois un dé équilibré et on note X le nombre de six obtenus. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$, et

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8.$$

SF 5.9 : Calculer une probabilité avec la loi binomiale

Une machine produit des pièces. Chaque pièce a, indépendamment des autres, une probabilité 0,03 d'être défectueuse. On prélève 20 pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses.

- 1) Justifier que $X \sim \mathcal{B}(20, 0,03)$.
- 2) Calculer $P(X = 2)$.
- 3) Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse.
- 4) Calculer la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.

SF 5.10 : Utiliser des probabilités cumulées d'une loi binomiale

On considère $X \sim \mathcal{B}(40, 0,35)$.

- 1) Calculer $P(X \leq 12)$.
- 2) Calculer $P(X \geq 15)$.
- 3) Calculer $P(10 \leq X \leq 18)$.

Méthode : Traduire les formulations

« Au plus k » signifie $X \leq k$. « Au moins k » signifie $X \geq k$. « Strictement plus de k » signifie $X \geq k + 1$. Pour les probabilités « au moins », le passage par l'événement contraire est souvent le plus rapide.

SF 5.11 : Exploiter l'espérance et la dispersion d'une loi binomiale

Une entreprise sait que 8% de ses clients souscrivent une option. On considère 250 clients indépendants et on note X le nombre de souscriptions.

- 1) Donner la loi de X .
- 2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- 3) Interpréter la valeur de $E(X)$ dans le contexte.

SF 5.12 : Mobiliser dénombrement et loi binomiale dans un même problème

Un questionnaire comporte 8 questions indépendantes à quatre réponses, dont une seule est correcte. Un candidat répond au hasard à chaque question. On note X le nombre de bonnes réponses.

- 1) Combien existe-t-il de suites possibles de 8 réponses ?
- 2) Combien de suites de réponses comportent exactement 3 bonnes réponses ? Expliquer le rôle de $\binom{8}{3}$.
- 3) Déterminer la loi de X .
- 4) Calculer $P(X = 3)$, puis $P(X \geq 4)$.