APES – Chapitre n°6
Limites de fonctions
Limites de fonctions de Terminale

1 - Notion de limite et interprétation graphique

Définition Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$:

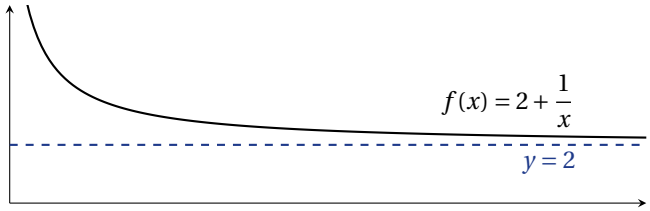
Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si les valeurs de $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On définit de manière analogue les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Définition Limite finie en l'infini :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
On définit de manière analogue une limite finie en $-\infty$.

Définition Asymptote horizontale :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f, respectivement en $+\infty$ ou en $-\infty$.



Définition Limite infinie en un réel a :

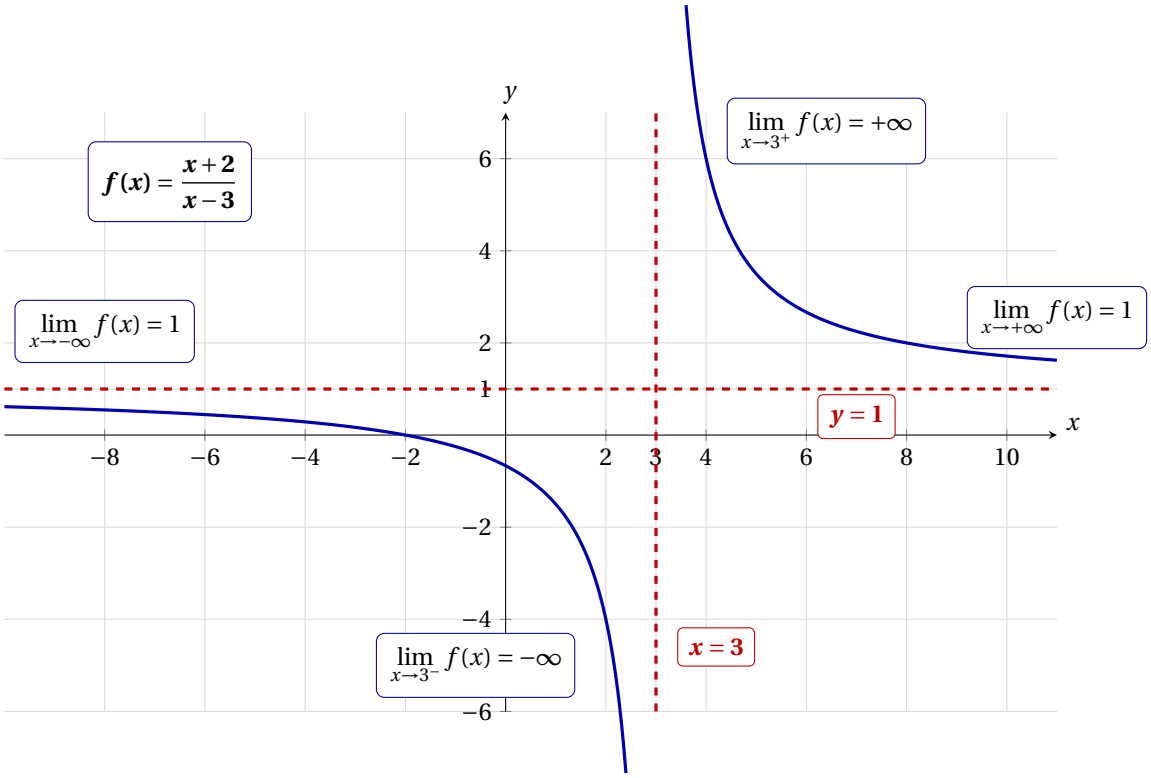
Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si les valeurs de $f(x)$ deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
On définit de manière analogue la limite $-\infty$ en a.

Définition Limites à gauche et à droite :

Lorsque le comportement de f dépend du côté par lequel x se rapproche de a, on distingue la **limite à gauche** et la **limite à droite** de a.
On peut écrire, par exemple, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ pour une limite à gauche et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ pour une limite à droite.

Définition Asymptote verticale :

Si au moins l'une des limites à gauche ou à droite de a est infinie, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.



SF 6.1 : Lire et interpréter graphiquement une limite

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$.

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) En déduire une asymptote horizontale à sa courbe.

c) Déterminer les limites de f à gauche et à droite de 0.

d) En déduire une asymptote verticale.

SF 6.2 : Utiliser les limites usuelles

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3}$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x+3}$.

2 - Opérations sur les limites

Dans les trois propriétés suivantes, la variable x peut tendre vers un réel, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Les lettres ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Propriété Limite d'une somme :

Si $f \to$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $g \to$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g \to$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Propriété Limite d'un produit :

Si $f \to$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
Et $g \to$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $fg \to$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Propriété Limite d'un quotient :

Si $f \to$	ℓ	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$\pm\infty$	0
Et $g \to$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0
Alors $\frac{f}{g} \to$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Méthode : Reconnaître une forme indéterminée

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture,

$$\text{« } \infty-\infty \text{ »}, \qquad \text{« } 0\times\infty \text{ »}, \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}, \qquad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »}.$$

Une forme indéterminée ne donne pas la limite : il faut transformer l'expression.

Propriété Limite d'une fonction composée :

Soient f et g deux fonctions. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, où a, b et c peuvent être des réels ou des infinis, alors

$$\boxed{\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.}$$

SF 6.3 : Calculer une limite par opérations

Calculer les limites suivantes en indiquant les opérations utilisées :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-5+\frac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+4x\right)$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-2)\left(3-\frac{1}{x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+4}$.

SF 6.4 : Déterminer une limite par composition

Déterminer les limites suivantes :

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+1} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{1}{\sqrt{x-2}} \qquad \textbf{c)}\ \lim_{x\to-\infty}(2-x)^3.$$

3 - Lever les formes indéterminées

Théorème : Limite d'un polynôme à l'infini

À $+\infty$ ou à $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

Démonstration : Terme de plus haut degré

Soit $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, avec $a_n\neq 0$. Pour $x\neq 0$,

$$P(x)=x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, le facteur entre parenthèses tend vers a_n. Le comportement de P est donc celui de a_nx^n.

Théorème : Limite d'une fonction rationnelle à l'infini

Soient P et Q deux polynômes. Pour déterminer la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on factorise au numérateur et au dénominateur par les termes de plus haut degré.
Ainsi, la fonction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré de P et de Q.

SF 6.5 : Déterminer les limites d'un polynôme et d'une fonction rationnelle

A) Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de

$$f(x)=-2x^4+3x^2-5x+1.$$

B) Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de

$$g(x)=\frac{3x^2-x+1}{2x^3+5x}.$$

SF 6.6 : Lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+3x-1}{2x^2-x+4} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} \qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+x}{x^2+1}.$$

Méthode : Trois transformations fréquentes

Factoriser les termes dominants à l'infini, factoriser une identité remarquable au voisinage d'un réel, ou utiliser l'expression conjuguée lorsqu'une racine carrée provoque une forme indéterminée.

4 - Comparaison et encadrement

Théorème : Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.
Si, pour tout x suffisamment grand, $f(x) \leqslant g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Si, pour tout x suffisamment grand, $f(x) \leqslant g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Les énoncés analogues sont valables en $-\infty$ et au voisinage d'un réel.

Théorème : Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de $+\infty$. Si, pour tout x suffisamment grand,

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$

et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell.}$$

Le même résultat est valable en $-\infty$ et au voisinage d'un réel.

SF 6.7 : Utiliser un théorème de comparaison

Déterminer les limites suivantes en justifiant l'encadrement utilisé :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sin x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - \sin x\right)$.

Méthode :

On utilise $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, puis on compare avec des fonctions dont la limite est connue.

SF 6.8 : Utiliser le théorème des gendarmes

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}.$$

Pour $x > 0$, construire dans chaque cas un encadrement par deux fonctions ayant la même limite.

5 - Asymptote oblique

Définition Asymptote oblique :

Soient m et p deux réels. Si

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(mx+p)\big)=0,$$

alors la droite d'équation $y=mx+p$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de f en $+\infty$.
La définition est analogue en $-\infty$.

Exemple : Pour $x\neq 1$,

$$\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$, la droite d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique en $+\infty$. Le même raisonnement vaut en $-\infty$.

SF 6.9 : Déterminer une asymptote oblique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par

$$f(x)=\frac{x^2-x+3}{x-2}.$$

a) Effectuer la division euclidienne du numérateur par $x-2$ et écrire $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
b) Déterminer les limites de $f(x)-(ax+b)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) En déduire une asymptote oblique à la courbe de f.