APES – Chapitre n°7
Suites 2

Suites arithmétiques et géométrique de 1ère, limites et raisonnement par récurrence de Terminale

1 - Suites arithmétiques et géométriques

Définition Suite arithmétique :

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r, appelé **raison**, tel que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Autrement dit, on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre.

On a donc, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Propriété Reconnaître une suite arithmétique :

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$.
Si cette différence est constante, la suite est arithmétique et cette constante est sa raison r. Si elle dépend de n, la suite n'est pas arithmétique.

Propriété Terme général d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Si le premier terme est u_0, alors

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}.$$

Si le premier terme est u_1, alors

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}.$$

Plus généralement, si l'on connaît un terme u_p, alors

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}.$$

Théorème : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
Si $r = 0$, la suite est constante.
Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.

SF 7.1 : Reconnaître une suite arithmétique et déterminer son terme général

Dire si les suites suivantes sont arithmétiques. Lorsque c'est le cas, préciser leur raison et donner l'expression de leur terme général.
1) $u_n = 5n - 2$
2) $v_n = n^2 + 1$
3) $w_0 = 7$ et $w_{n+1} = w_n - 4$

4) (t_n) est arithmétique, $t_4 = -7$ et $t_{10} = 11$.

Propriété Somme des premiers entiers :

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\boxed{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Avec la notation $\sum$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par

$$\boxed{\text{somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}.$$

En particulier,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}.$$

SF 7.2 : Calculer avec une suite arithmétique

1) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. Calculer u_{20}.
2) Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$.
3) Une entreprise produit 1 200 pièces la première semaine et augmente sa production de 80 pièces chaque semaine. Modéliser la situation et calculer la production totale des 12 premières semaines.

Méthode :

Pour une somme allant du rang p au rang n, le nombre de termes est $n - p + 1$.

Définition Suite géométrique :

Une suite (u_n) est dite **géométrique** lorsqu'il existe un réel q, appelé **raison**, tel que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = q\,u_n.$$

Autrement dit, on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

Lorsque $u_n \neq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Propriété Reconnaître une suite géométrique :

Pour démontrer qu'une suite (u_n), dont les termes sont non nuls, est géométrique, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
Si ce quotient est constant, la suite est géométrique et cette constante est sa raison q.

Propriété Terme général d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Si le premier terme est u_0, alors

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}.$$

Si le premier terme est u_1, alors

$$\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}.$$

Plus généralement, si l'on connaît un terme u_p, alors

$$\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}.$$

Théorème : Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, de premier terme $u_0 \neq 0$.

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
$q > 1$	strictement croissante	strictement décroissante
$0 < q < 1$	strictement décroissante	strictement croissante
$q = 1$	constante	constante

Si $q < 0$, les termes changent de signe d'un rang à l'autre : la suite n'est généralement pas monotone.

Propriété Somme de puissances successives :

Soit q un réel et n un entier naturel.
Si $q \neq 1$, alors

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

Avec la notation $\sum$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Propriété Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors

$$\boxed{\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}.$$

En particulier, pour $p \leqslant n$,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

SF 7.3 : Reconnaître et utiliser une suite géométrique

1) Déterminer si $u_n = 3 \times 2^n$ est géométrique et préciser sa raison.
2) Une suite (v_n) est géométrique, $v_2 = 12$ et $v_5 = 324$. Déterminer sa raison positive et exprimer v_n en fonction de n.
3) Calculer $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$.
4) Une population de 15000 habitants augmente de 3 % par an. Modéliser cette évolution par une suite géométrique et exprimer la population n années plus tard.

Méthode :

Une évolution répétée de t % correspond à une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$; une diminution de t % correspond à une multiplication par $1 - \frac{t}{100}$.

2 - Limites de suites

Définition Limite infinie :

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si les termes u_n deviennent aussi grands que l'on veut lorsque n devient suffisamment grand. On note

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}.$$

De même, on dit que (u_n) a pour limite $-\infty$ si les termes deviennent aussi petits que l'on veut lorsque n devient suffisamment grand.

Définition Limite finie, convergence et divergence :

On dit que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ lorsque les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ lorsque n devient suffisamment grand. On note

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}.$$

Une suite qui admet une limite réelle est dite **convergente**. Une suite qui ne converge pas vers un réel est dite **divergente**.

SF 7.4 : Déterminer une limite simple

Déterminer les limites des suites suivantes :

1) $u_n = 3n^2 - 7$ **2)** $v_n = \dfrac{4}{n^3}$ **3)** $w_n = \sqrt{n} + 2$.

Méthode :

Identifier les limites usuelles puis utiliser les opérations sur les limites lorsque cela est possible.

Propriété Formes indéterminées :

Les opérations sur les limites sont les mêmes que pour les limites de fonctions. Les quatre formes indéterminées à reconnaître sont, par abus d'écriture,

$$\boxed{\text{« } \infty - \infty \text{ »}, \quad \text{« } 0 \times \infty \text{ »}, \quad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}, \quad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »}}.$$

Lorsqu'une forme indéterminée apparaît, on doit transformer l'expression avant de conclure.

SF 7.5 : Calculer une limite par opérations et lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

1) $u_n = n^2 + 5n + 3$, **2)** $v_n = \dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$,

3) $w_n = \dfrac{3n^2+n}{n+3}$, **4)** $t_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$.

Propriété Limite de q^n :

Soit q un réel.

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	n'existe pas en général	0	1	$+\infty$

En particulier, pour $q = -1$, la suite $((-1)^n)$ alterne entre 1 et -1, donc elle n'a pas de limite.

SF 7.6 : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Étudier la convergence des suites suivantes :

1) $u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$, **2)** $v_n = -4\left(\sqrt{3}\right)^n$,

3) $w_n = (-2)^n$, **4)** $t_n = 3^n - 5^n$.

Méthode :

Pour les différences de puissances, factoriser par la puissance dominante afin de lever une éventuelle indétermination.

Théorème : Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \geqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$.

Théorème : Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell,$$

alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell}.$$

SF 7.7 : Utiliser un théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes

Déterminer les limites des suites suivantes :

1) $u_n = n^3 + (-1)^n$,

2) $v_n = \dfrac{4 + (-1)^n}{n^2}$ $(n \geqslant 1)$,

3) $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$ $(n \geqslant 1)$.

3 - Raisonnement par récurrence

Définition Propriété et hérédité :

Une **propriété mathématique** concernant un entier naturel n peut être notée P_n.
Une propriété est dite **héréditaire** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$P_n \text{ vraie} \quad \Longrightarrow \quad P_{n+1} \text{ vraie.}$$

Théorème : Principe de récurrence

Soit P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n, et soit n_0 un entier naturel.
Pour démontrer que P_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, on suit trois étapes.
1) Initialisation : on démontre que P_{n_0} est vraie.
2) Hérédité : on considère un entier $n \geqslant n_0$, on suppose P_n vraie, puis on démontre P_{n+1} vraie.
3) Conclusion : on affirme que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

SF 7.8 : Démontrer une égalité par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{u_n = (n+1)^2}.$$

SF 7.9 : Démontrer une inégalité par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 0{,}3u_n + 7.$$

Démontrer par récurrence que

$$\boxed{u_n \leqslant 10}$$

pour tout entier naturel n.