APES– Chapitre n°8
Angles orientés et fonctions circulaires

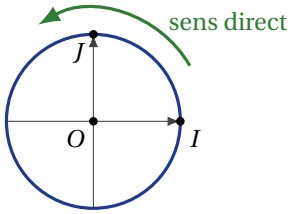
Angles orientés de 1ère, fonctions circulaires de Terminale

1 - Angles orientés

Définition : Cercle orienté et cercle trigonométrique

Un cercle est dit **orienté** lorsqu'on choisit un sens de parcours. Par convention, le **sens direct**, ou sens positif, est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct, est appelé **cercle trigonométrique**.



Définition : Radian

Sur le cercle trigonométrique, un angle mesure **un radian** lorsqu'il intercepte un arc de longueur 1.
Comme le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre vaut 2π. Ainsi, un tour complet mesure 2π radians, un demi-tour mesure π radians et un quart de tour mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radians.

Propriété : Conversion entre degrés et radians

Comme $180° = \pi$ radians, on a

$$\text{mesure en radians} = \text{mesure en degrés} \times \frac{\pi}{180}$$

et réciproquement

$$\text{mesure en degrés} = \text{mesure en radians} \times \frac{180}{\pi}.$$

Angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Définition : Angle orienté de deux vecteurs

Dans un plan orienté, l'angle orienté de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $(\vec{u};\vec{v})$.
Une même position angulaire possède une infinité de mesures qui diffèrent d'un nombre entier de tours, donc d'un multiple de 2π.

Définition : Mesure principale

Si α est une mesure d'un angle orienté, toutes ses mesures sont de la forme

$$\alpha + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La **mesure principale** est l'unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exemple : Une mesure principale de $\dfrac{17\pi}{6}$ est $\dfrac{5\pi}{6}$, car $\dfrac{17\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{5\pi}{6}$. Une mesure principale de $-\dfrac{9\pi}{4}$ est $-\dfrac{\pi}{4}$.

Propriété : Relations sur les angles orientés

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a les égalités suivantes modulo 2π :

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = -(\vec{v}\,;\vec{u}),$$

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) + (\vec{v}\,;\vec{w}) = (\vec{u}\,;\vec{w}),$$

$$(\vec{u}\,;-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi.$$

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsque leur angle orienté vaut 0 ou π modulo 2π.

SF 8.1 : Convertir des angles et déterminer une mesure principale

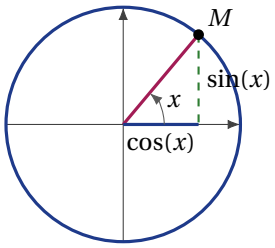
1) Convertir en radians : $45°$, $150°$, $270°$.
2) Convertir en degrés : $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{4}$.
3) Déterminer la mesure principale de $\dfrac{23\pi}{6}$, $-\dfrac{19\pi}{4}$ et $\dfrac{31\pi}{3}$.

2 - Fonctions circulaires

Définition : Cosinus et sinus d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel x. Le **cosinus** de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M, et le **sinus** de x, noté $\sin(x)$, est son ordonnée.
Ainsi,

$$\boxed{M\big(\cos(x);\sin(x)\big)}.$$



Propriété : Propriétés fondamentales du cosinus et du sinus

Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

Pour tout réel x et tout entier relatif k,

$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+2k\pi) = \sin(x).$$

Les fonctions cosinus et sinus sont donc périodiques de période 2π.
Enfin,

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}.$$

Propriété : Parité et angles associés

Pour tout réel x,

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

On a également

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x),$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x),$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x),$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x).$$

Propriété : Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes sont à connaître.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

SF 8.2 : Lire et calculer des cosinus et sinus

1) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

2) On sait que $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) = \frac{3}{5}$. Déterminer $\sin(x)$.

3) On sait que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et $\sin(x) = -\frac{5}{13}$. Déterminer $\cos(x)$.

Définition : Tangente

Pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, on définit

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}.$$

La fonction tangente est donc définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3 - Trigonométrie

Propriété : Formules d'addition et de soustraction

Pour tous réels a et b,

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),\\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).\end{aligned}}$$

Propriété : Formules de duplication

Pour tout réel x,

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$$

et

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)}.$$

Propriété : Formules de linéarisation

Pour tout réel x,

$$\boxed{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}.$$

SF 8.3 : Utiliser les formules trigonométriques

1) Calculer exactement $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
2) Exprimer $\cos^2(x) - \sin^2(x)$ puis $2\sin(x)\cos(x)$ à l'aide d'une seule fonction trigonométrique.
3) Linéariser $3\sin^2(x) - 2\cos^2(x)$.

4 - Étude des fonctions circulaires

Propriété : Périodicité et symétries

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π.
La fonction cosinus est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La fonction sinus est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété : Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \quad \text{et} \quad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Plus généralement, si u est dérivable sur un intervalle I, alors

$$\boxed{\big(\sin(u(x))\big)' = u'(x)\cos(u(x))}$$

et

$$\boxed{\big(\cos(u(x))\big)' = -u'(x)\sin(u(x))}.$$

Propriété : Variations de la fonction cosinus sur $[-\pi;\pi]$

La dérivée de la fonction cosinus est $-\sin(x)$. Son signe permet d'obtenir le tableau de variations suivant.

x	$-\pi$		0		π
$-\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos(x)$	-1	↗	1	↘	-1

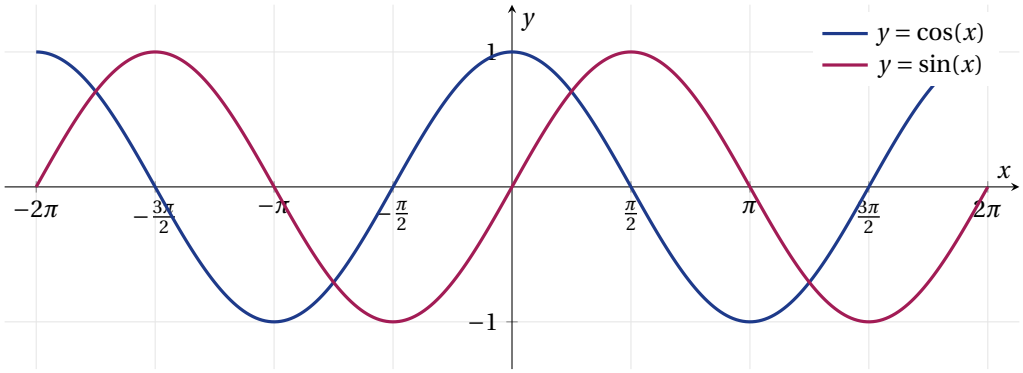
Propriété : Variations de la fonction sinus sur $[-\pi;\pi]$

La dérivée de la fonction sinus est $\cos(x)$. Son signe permet d'obtenir le tableau de variations suivant.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Propriété : Courbes représentatives

Grâce à la périodicité, il suffit de connaître les courbes sur un intervalle de longueur 2π.



SF 8.4 : Calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = \sin(3x) - 2\cos(x)$

2) $g(x) = \cos(5x - 1)$

3) $h(x) = x\sin(x)$

4) $p(x) = \dfrac{\sin(x)}{3 + \cos(x)}$

SF 8.5 : Étudier une fonction définie à partir de fonctions trigonométriques

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x) + 1.$$

1) Étudier la parité de f.

2) Montrer que f est périodique de période 2π.

3) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$.

4) Calculer $f'(x)$, étudier son signe sur $[0;\pi]$ puis dresser le tableau de variations de f avec `tkz-tab`.

5 - Équations et inéquations trigonométriques

Propriété : Résoudre $\cos(x) = a$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Si $|a| > 1$, l'équation $\cos(x) = a$ n'a pas de solution.
Si $|a| \leqslant 1$ et si x_0 est une solution de $\cos(x) = a$, alors toutes les solutions sont

$$\boxed{x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -x_0 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

En particulier,

$$\boxed{\cos(x) = \cos(y) \iff x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Propriété : Résoudre $\sin(x) = a$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Si $|a| > 1$, l'équation $\sin(x) = a$ n'a pas de solution.
Si $|a| \leqslant 1$ et si x_0 est une solution de $\sin(x) = a$, alors toutes les solutions sont

$$\boxed{x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - x_0 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

En particulier,

$$\boxed{\sin(x) = \sin(y) \iff x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

SF 8.6 : Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre les équations suivantes.

1) Dans $[-\pi ; \pi]$, $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Dans $\mathbb{R}$, $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$.

3) Dans $\left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$, $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$.

4) Dans $[-\pi ; \pi]$, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$.

Propriété : Résoudre une inéquation trigonométrique

Pour résoudre une inéquation telle que $\cos(x) \leqslant a$ ou $\sin(x) \geqslant a$, on commence par résoudre l'équation associée. On place ensuite les solutions sur le cercle trigonométrique ou sur la courbe de la fonction, puis on détermine les arcs ou intervalles qui vérifient l'inégalité.
La périodicité permet ensuite d'obtenir toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

SF 8.7 : Résoudre une inéquation trigonométrique

Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$:

1) $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\sin(x) > \dfrac{1}{2}$

3) $\cos(x) < 0$