

MPSI– Chapitre n°2

Calcul algébrique et trigonométrie

Compétences visées. Savoir manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$, changer d'indice et regrouper des termes, reconnaître un télescopage, calculer et transformer des sommes doubles, utiliser les coefficients binomiaux et Newton, résoudre et discuter un système linéaire, manipuler correctement les inégalités et la valeur absolue, utiliser la partie entière, puis exploiter les formules trigonométriques dans des calculs et des équations.

1 - Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie

Définition : Somme et produit d'une famille finie

Soit $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ un ensemble fini et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels. On définit

$$\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + \dots + u_{i_n}, \quad \prod_{i \in I} u_i = u_{i_1} \cdots u_{i_n}.$$

Par convention,

$$\sum_{i \in \emptyset} u_i = 0, \quad \prod_{i \in \emptyset} u_i = 1.$$

Propriété : Linéarité, produit terme à terme et facteur constant

Si I est fini de cardinal n , alors

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (a_i + b_i) &= \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i, & \sum_{i \in I} \lambda a_i &= \lambda \sum_{i \in I} a_i, \\ \prod_{i \in I} (a_i b_i) &= \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \left(\prod_{i \in I} b_i \right), & \prod_{i \in I} (\lambda a_i) &= \lambda^n \prod_{i \in I} a_i. \end{aligned}$$

Propriété : Regroupement de termes

Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i, \quad \prod_{i \in I} u_i = \left(\prod_{i \in I_1} u_i \right) \left(\prod_{i \in I_2} u_i \right).$$

Plus généralement, si $(I_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une partition de I ,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right), \quad \prod_{i \in I} u_i = \prod_{k=1}^p \left(\prod_{i \in I_k} u_i \right).$$

Propriété : Changement de variable dans une famille finie

Soient I, J finis et $\varphi : I \rightarrow J$ une bijection. Pour une famille $(u_j)_{j \in J}$,

$$\boxed{\sum_{i \in I} u_{\varphi(i)} = \sum_{j \in J} u_j}, \quad \boxed{\prod_{i \in I} u_{\varphi(i)} = \prod_{j \in J} u_j}.$$

On ne change donc pas la valeur d'une somme ou d'un produit en réindexant bijectivement les termes.

Méthode : Changer d'indice dans une somme

Pour une translation $j = k + r$, transformer simultanément le terme et les deux bornes :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}.$$

Pour renverser l'ordre, on peut prendre $j = p + q - k$. Le nouvel indice doit parcourir les valeurs sans oubli ni répétition.

Télescopes**Propriété : Somme et produit télescopiques**

Pour une famille (u_k) ,

$$\sum_{k=p}^q (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.$$

Si les termes sont non nuls,

$$\prod_{k=p}^q \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}.$$

Démonstration : Télescope

En développant,

$$(u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \cdots + (u_{q+1} - u_q),$$

tous les termes intermédiaires se compensent. Pour le produit, les facteurs intermédiaires se simplifient de la même manière.

Méthode : Faire apparaître un télescope

Pour une fraction rationnelle en k , essayer une décomposition en éléments simples, par exemple

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pour un produit, factoriser les termes afin de faire apparaître des quotients consécutifs.

Sommes usuelles et somme géométrique**Propriété : Sommes usuelles**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1, \\ n+1, & x = 1. \end{cases}$$

Démonstration : Somme des premiers entiers

On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$, la formule est vraie. Si

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Démonstration : Somme des carrés

Pour $n = 1$, la formule est vraie. En supposant la formule vraie au rang n ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

C'est la formule au rang $n+1$.

Démonstration : Somme des cubes – démonstration de colle

Pour $n = 1$, la formule est vraie. Supposons

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Démonstration : Somme géométrique

Pour $x \neq 1$, posons $S = 1 + x + \dots + x^n$. Alors

$$xS = x + x^2 + \dots + x^{n+1}.$$

Par soustraction, $(1-x)S = 1 - x^{n+1}$, d'où la formule. Pour $x = 1$, on additionne $n+1$ termes égaux à 1.

Identité géométrique

Propriété : Identité géométrique

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Démonstration : Identité géométrique – démonstration de colle

On développe :

$$\begin{aligned}(a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} &= \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i} \\ &= \sum_{j=1}^n a^j b^{n-j} - \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i} \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

Tous les termes intermédiaires se compensent.

2 - Sommes doubles et coefficients binomiaux

Sommes doubles

Définition : Somme double

Soient I, J deux ensembles finis non vides et $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille. Pour $K \subset I \times J$,

$$\sum_{(i,j) \in K} u_{i,j}$$

est appelée somme double.

Propriété : Somme sur un pavé

Sur $K = I \times J$,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

Les deux écritures additionnent exactement les mêmes termes.

Propriété : Produit de deux sommes finies

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j.$$

Définition : Somme triangulaire

On appelle notamment somme triangulaire une somme de la forme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i u_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n u_{i,j}.$$

Par exemple,

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j u_{i,j}.$$

Méthode : Inverser une somme triangulaire

Décrire d'abord le domaine d'indices. Pour $1 \leq i \leq j \leq n$, à i fixé, j varie de i à n ; à j fixé, i varie de 1 à j . Cette lecture du triangle d'indices évite les erreurs de bornes.

Factorielle et coefficients binomiaux**Définition : Factorielle**

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \prod_{i=1}^n i, \quad 0! = 1.$$

En particulier $(n+1)! = (n+1)n!$.

Définition : Coefficient binomial

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On adopte la convention

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n.$$

Propriété : Propriétés fondamentales des coefficients binomiaux

Pour les indices admissibles,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (\text{symétrie}),$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (\text{Pascal}),$$

$$n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k} \quad (k \geq 1).$$

Démonstration : Propriétés des coefficients binomiaux – démonstration de colle

La symétrie vient directement de la définition. De même,

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Pour Pascal,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Binôme de Newton

Propriété : Formule du binôme de Newton

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

La même formule est valable dans $\mathbb{C}$.

Démonstration : Binôme de Newton – démonstration de colle

On raisonne par récurrence sur n . Le rang 0 est immédiat. Supposons la formule vraie au rang n . Alors

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Dans la première somme, on pose $j = k + 1$, puis on regroupe les termes de même degré :

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) a^j b^{n+1-j}.$$

La formule de Pascal donne le résultat au rang $n + 1$.

Propriété : Conséquences classiques

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2^n, & \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= 0, \\ \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} &= n2^{n-1}.\end{aligned}$$

Méthode : Choisir le bon réflexe binomial

Avant de développer les factorielles, tester : symétrie, Pascal, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, ou Newton avec un choix simple de a et b . Pour une convolution, comparer les coefficients d'un même monôme dans un produit de polynômes.

3 - Résolution de systèmes linéaires

Définitions et vocabulaire

Définition : Système linéaire

Un système linéaire à n équations et p inconnues est de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n. \end{cases}$$

Une solution est un p -uplet vérifiant simultanément toutes les équations.

Définition : Vocabulaire

Un système est :

- **compatible** s'il admet au moins une solution, **incompatible** sinon ;
- **homogène** si tous les seconds membres sont nuls ;
- **de Cramer** s'il admet une solution unique ;
- **triangulaire supérieur** si le nombre d'équations égale celui des inconnues et si les coefficients sous la diagonale sont nuls.

Propriété : Système triangulaire

Un système triangulaire supérieur carré est de Cramer si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On le résout alors par substitutions remontantes.

Opérations élémentaires et pivot de Gauss

Définition : Opérations élémentaires sur les lignes

Les transformations autorisées sont

$$L_i \leftrightarrow L_j, \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0), \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad (i \neq j).$$

Propriété : Conservation de l'ensemble des solutions

Toute opération élémentaire transforme un système en un système **équivalent**, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions.

Démonstration : Pourquoi les opérations élémentaires sont réversibles

L'échange de deux lignes est son propre inverse. La transformation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ s'inverse par multiplication par $1/\lambda$. Enfin, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ s'inverse par $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$. Chaque transformation conserve donc exactement l'ensemble des solutions.

Méthode : Algorithme du pivot de Gauss

1. Choisir un coefficient non nul comme pivot, de préférence 1 ou -1 .
2. Placer le pivot sur la première ligne non traitée.
3. Annuler les coefficients sous le pivot à l'aide d'opérations élémentaires.
4. Recommencer sur les lignes restantes.
5. Une fois le système échelonné ou triangulaire, effectuer les substitutions remontantes.

Avec un paramètre, **ne jamais diviser par une expression dépendant du paramètre avant d'avoir séparé le cas où elle s'annule**.

Interprétation géométrique

Propriété : Dans le plan

Dans un repère orthonormé, l'équation

$$ax + by = c \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

définit une droite de vecteur normal (a, b) et de vecteur directeur $(-b, a)$. Un système de deux équations à deux inconnues décrit l'intersection de deux droites : une solution, aucune solution ou une infinité de solutions.

Méthode : Équation d'une droite

Si $A \in D$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur,

$$M \in D \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal,

$$M \in D \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Propriété : Dans l'espace

Dans un repère orthonormé, le plan

$$ax + by + cz = d$$

a pour vecteur normal (a, b, c) . Résoudre un système à trois inconnues revient géométriquement à déterminer une intersection de plans.

Définition : Produit vectoriel et déterminant mixte

Pour $\vec{u} = (X, Y, Z)$ et $\vec{v} = (X', Y', Z')$,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} YZ' - ZY' \\ ZX' - XZ' \\ XY' - YX' \end{pmatrix}.$$

On a

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0},$$

et, si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, ce vecteur est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. De plus,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Méthode de Cramer**Propriété : Cramer à l'ordre 2**

Pour

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{cases} \quad \Delta = ab' - a'b,$$

si $\Delta \neq 0$, le système admet une unique solution

$$x = \frac{cb' - c'b}{\Delta}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{\Delta}.$$

Démonstration : Formules de Cramer à l'ordre 2

Éliminons y : on multiplie la première équation par b' , la seconde par b , puis on soustrait. On obtient

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b.$$

Comme $\Delta \neq 0$, la formule pour x suit. L'élimination de x donne de même la formule pour y .

Propriété : Cramer à l'ordre 3

Pour un système carré 3×3 , si le déterminant Δ de la matrice des coefficients est non nul, le système admet une solution unique. Les coordonnées s'obtiennent en remplaçant successivement une colonne de coefficients par la colonne des seconds membres et en divisant le déterminant obtenu par Δ .

4 - Inégalités dans les réels

Relation d'ordre et intervalles

Définition : Relations $\leq$ et $<$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \leq y \iff y - x \geq 0.$$

Si de plus $x \neq y$, on écrit $x < y$.

Propriété : Ordre total et compatibilité avec les opérations

La relation $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{R}$. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c.$$

Si $c \geq 0$, alors

$$a \leq b \implies ac \leq bc,$$

et si $c \leq 0$,

$$a \leq b \implies bc \leq ac.$$

Propriété : Addition et multiplication membre à membre

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors

$$a + c \leq b + d.$$

Si en outre $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors

$$ac \leq bd.$$

Définition : Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour $a \leq b$,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

On utilise de même les intervalles semi-ouverts et non bornés, par exemple $[a, b[$, $[a, +\infty[$ et $] -\infty, a]$.

Valeur absolue

Définition : Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Propriété : Calculs avec la valeur absolue

Pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|xy| = |x||y|, \quad |x^n| = |x|^n, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

De plus,

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad |a| = |b| \iff a = b \text{ ou } a = -b.$$

Propriété : Inégalités triangulaires

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$

Démonstration : Inégalité triangulaire

Les deux membres sont positifs. En élevant au carré,

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x| + |y|)^2.$$

On en déduit $|x + y| \leq |x| + |y|$. Pour l'inégalité triangulaire renversée,

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

donc $|x| - |y| \leq |x - y|$, et en échangeant x et y ,

$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$

Propriété : Distance à un réel

Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq b\} = \begin{cases} \emptyset, & b < 0, \\ [a - b, a + b], & b \geq 0. \end{cases}$$

Méthode : Résoudre avec une valeur absolue

Pour $b \geq 0$,

$$|x - a| \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b,$$

$$|x - a| \geq b \iff x \leq a - b \text{ ou } x \geq a + b.$$

Pour des expressions plus compliquées, repérer d'abord les changements de signe puis raisonner par intervalles.

Parties bornées, maximum et minimum

Définition : Partie majorée, minorée, bornée

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- A est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$.
- A est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq m$ pour tout $x \in A$.
- A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition : Maximum et minimum

Un réel a est un maximum de A si $a \in A$ et $x \leq a$ pour tout $x \in A$. Il est un minimum de A si $a \in A$ et $x \geq a$ pour tout $x \in A$.

Propriété : Partie finie

Toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ possède un maximum et un minimum.

Propriété : Fonction bornée

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad |f(x)| \leq M.$$

Partie entière et propriété d'Archimède

Propriété : Propriété d'Archimède

Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$Na \geq b.$$

Ce résultat fondamental sur $\mathbb{R}$ est admis à ce stade du cours.

Définition : Partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p \leq x < p + 1.$$

Cet entier est la partie entière de x , notée

$$\lfloor x \rfloor = p.$$

Propriété : Approximation décimale par défaut et par excès

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} \leq x < \frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} + 10^{-p}.$$

Le terme de gauche est l'approximation décimale par défaut à 10^{-p} , et le terme de droite fournit l'approximation par excès associée.

Méthode : Manipuler la partie entière

Revenir à la définition. Pour montrer $\lfloor u \rfloor = m$, il suffit de prouver

$$m \leq u < m + 1$$

avec $m \in \mathbb{Z}$. Pour une expression dépendant d'un entier modulo q , une disjonction de cas selon le reste modulo q est souvent efficace.

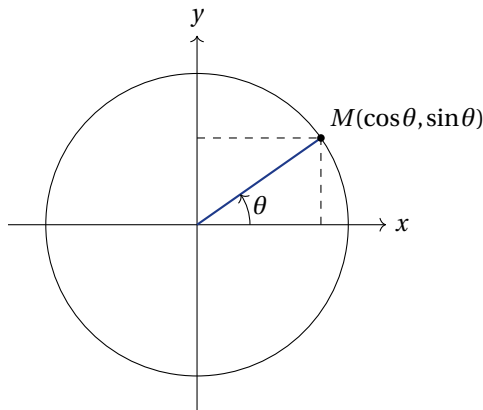
5 - Trigonométrie

Cercle trigonométrique et valeurs remarquables

Définition : Sinus, cosinus et tangente

Dans un repère orthonormé, soit M un point du cercle unité et x une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Si $M = (X, Y)$, on pose

$$\cos x = X, \quad \sin x = Y, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{si } \cos x \neq 0.$$



Propriété : Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0

Propriété : Relations fondamentales

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Lorsque $\tan x$ est définie,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Périodicité et symétries

Propriété : Formules de symétrie

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x,$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

Formules d'addition et de duplication

Propriété : Formules d'addition

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

On en déduit

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Lorsque les tangentes sont définies,

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Démonstration : Justification de la formule de $\cos(a - b)$

Sur le cercle unité, considérons

$$\vec{u} = (\cos a, \sin a), \quad \vec{v} = (\cos b, \sin b).$$

Le produit scalaire vaut d'une part

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

et d'autre part, comme les deux vecteurs sont unitaires et que l'angle orienté entre eux vaut $a - b$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a - b).$$

On obtient donc la formule. Les autres formules d'addition se déduisent des symétries précédentes.

Propriété : Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a,$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

lorsque les expressions sont définies.

Paramétrage par $t = \tan(x/2)$

Propriété : Formules de l'angle moitié

Si $x \neq \pi [2\pi]$, on peut poser

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Alors

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Lorsque $\tan x$ est définie,

$$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Démonstration : Formules de l'angle moitié

À partir de $t = \tan(x/2) = \sin(x/2) / \cos(x/2)$, on écrit

$$1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2(x/2)}.$$

Puis

$$\cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

et

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Transformer produits et sommes

Propriété : Linéarisation

Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} (\cos(p - q) + \cos(p + q)),$$

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2} (\cos(p - q) - \cos(p + q)),$$

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2} (\sin(p + q) + \sin(p - q)).$$

Propriété : Sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Méthode : Retrouver rapidement les formules

Les formules de linéarisation s'obtiennent en ajoutant ou en soustrayant les formules de $\cos(p + q)$, $\cos(p - q)$, $\sin(p + q)$ et $\sin(p - q)$. Il vaut mieux savoir les retrouver que les apprendre comme une liste indépendante.

Équations trigonométriques

Propriété : Équations de base

Pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \cos y \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi],$$

$$\sin x = \sin y \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi],$$

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y [\pi]$$

lorsque les tangentes sont définies.

Inégalités, limites et dérivées trigonométriques

Propriété : Inégalités classiques

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\tan x| \geq |x|.$$

Propriété : Limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

La seconde s'obtient de la première avec

$$1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Propriété : Dérivées

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

La fonction tangente est dérivable sur son domaine et

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Démonstration : Dérivées de sinus et cosinus

À l'aide des formules d'addition,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, le premier quotient tend vers 0 et le second vers 1, d'où $(\sin x)' = \cos x$.

De même,

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h},$$

ce qui donne $(\cos x)' = -\sin x$.

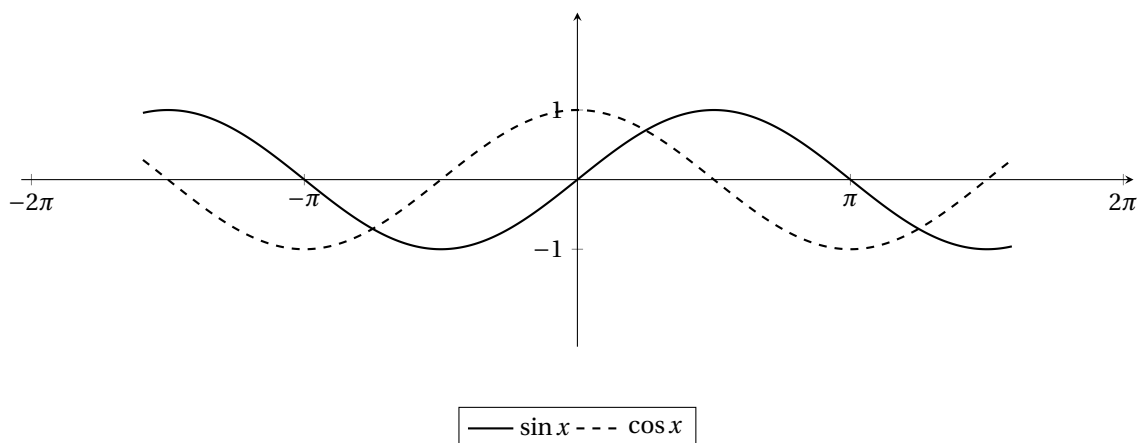
Démonstration : Dérivée de la tangente

Sur son domaine,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Par la formule de dérivation d'un quotient,

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$



Bilan : réflexes à acquérir

- Pour une somme : développer quelques termes, chercher une somme connue, un changement d'indice ou un télescopage.
- Pour une somme double : décrire le domaine d'indices avant de permuter les sommations.
- Pour un coefficient binomial : tenter Pascal, symétrie ou Newton avant les factorielles.
- Pour un système : utiliser des opérations réversibles et séparer les valeurs particulières des paramètres avant une division.
- Pour une inégalité : contrôler le signe avant multiplication ou division ; avec une valeur absolue, raisonner en termes de distance ou par intervalles.

- Pour la partie entière : revenir à l'encadrement entre deux entiers consécutifs.
- En trigonométrie : réduire l'angle, utiliser les symétries, puis choisir entre addition, duplication, linéarisation ou équations de base.