

1^{re} spé – Chapitre n°1

Fonction polynôme du second degré

1 - Forme développée et définition

Définition : Fonction polynôme du second degré

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme du second degré** s'il existe trois réels a , b et c , avec $a \neq 0$, tels que, pour tout réel x ,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

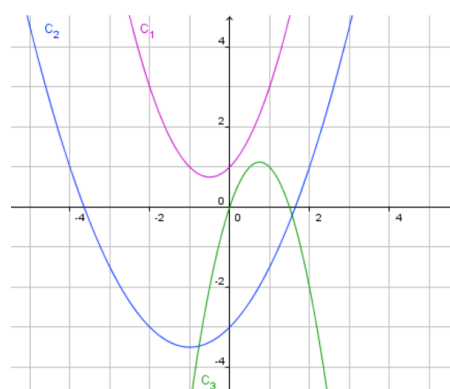
Cette écriture s'appelle la **forme développée** de f .

Le réel a est le coefficient de x^2 , le réel b est le coefficient de x , et le réel c est le terme constant.

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une **parabole**.

Si le coefficient a est **positif**, la fonction est décroissante puis croissante.

Si le coefficient a est **négalif**, la fonction est croissante puis décroissante.



Exemple : La fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ est une fonction polynôme du second degré. On a $a = 3$, $b = -7$ et $c = 3$. La fonction g définie par $g(x) = 5x - 3$ n'est pas du second degré, car le coefficient de x^2 est nul.

Propriété : Reconnaître la forme développée

Pour reconnaître une fonction polynôme du second degré, on développe et on réduit son expression.

Si, après réduction, le terme de plus haut degré est de la forme ax^2 avec $a \neq 0$, alors la fonction est une fonction polynôme du second degré.

Si le terme en x^2 disparaît, alors la fonction n'est pas une fonction polynôme du second degré.

SF 1.1 : Reconnaître une fonction polynôme du second degré

Dire si les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré. Lorsque c'est le cas, donner les coefficients a , b et c .

1) $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$

2) $g(x) = 7x - 9$

3) $h(x) = (2x - 1)(x + 3)$

4) $p(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$

5) $q(x) = (x - 2)^2 - 49$

6) $r(x) = 3x^2 - (x + 1)(3x - 4)$

Méthode :

On développe seulement si l'expression n'est pas déjà sous la forme $ax^2 + bx + c$. On réduit ensuite, puis on regarde si le coefficient de x^2 est non nul.

SF 1.2 : Développer et réduire pour obtenir la forme développée

Écrire chaque expression sous la forme développée $ax^2 + bx + c$, puis préciser les coefficients a , b et c .

1) $(x + 5)(x - 2)$

2) $2(x - 3)^2 + 1$

3) $-(x + 1)^2 + 6$

4) $(3x - 1)(x + 4) - 2x$

2 - Forme factorisée, racines, somme et produit

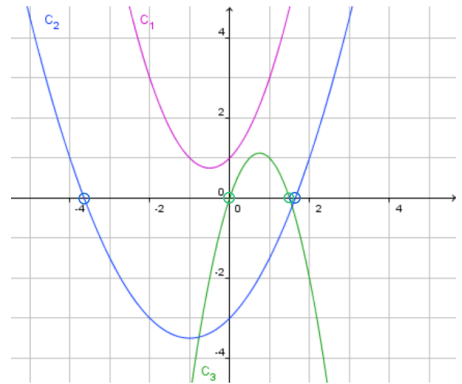
Définition : Racine d'un polynôme

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Une racine d'une fonction f est une valeur de x qui annule cette fonction, c'est-à-dire telle que

$$f(x) = 0$$

Graphiquement, les racines de f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Un polynôme du second degré peut donc avoir, suivant les cas, **aucune racine**, **1 seule racine** ou **2 racines**.



Définition : Forme factorisée

Dans le cas où la fonction polynôme du second degré possède **2 racines**, elle peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où a , x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$.

Cette écriture est une **forme factorisée**. Dans ce cas, x_1 et x_2 sont des racines de f , car un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple : Si $f(x) = 2(x - 3)(x + 1)$, alors f est une fonction polynôme du second degré de racines 3 et -1 . Sa forme développée est $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

Propriété : Lire et utiliser une forme factorisée

Soit f une fonction polynôme du second degré.

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a \neq 0$, alors les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont x_1 et x_2 .

Réciproquement, si x_1 et x_2 sont deux racines distinctes de f , alors f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

où a est le coefficient de x^2 dans la forme développée.

SF 1.3 : Exploiter une forme factorisée

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (1 - x)(x + 5).$$

- 1) Lire les valeurs de a , x_1 et x_2 pour la fonction f , puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- 2) Lire les valeurs de a , x_1 et x_2 pour la fonction g , puis résoudre l'équation $g(x) = 0$.
- 3) Étudier le signe de $f(x)$ et de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Propriété : Somme et produit des racines

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où $a \neq 0$. Si f admet deux racines x_1 et x_2 , éventuellement égales, alors leur somme S et leur produit P vérifient

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration : Somme et produit des racines

Lorsque f admet deux racines x_1 et x_2 , on peut écrire

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

En développant, on obtient

$$f(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2.$$

On compare avec $f(x) = ax^2 + bx + c$. On en déduit

$$b = -a(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad c = ax_1 x_2.$$

Comme $a \neq 0$, on obtient bien

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

SF 1.4 : Déterminer une fonction connaissant ses racines

Déterminer les fonctions polynômes du second degré vérifiant les conditions données.

- 1) f s'annule en -5 et en 7 .
- 2) g s'annule en $\frac{1}{3}$ et en 6 , et vérifie $g(0) = 5$.
- 3) h s'annule en -2 et en 4 , et vérifie $h(2) = -2$.

Méthode :

Lorsque les racines sont connues, on commence par écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. S'il manque le coefficient a , on utilise une valeur donnée de la fonction.

SF 1.5 : Utiliser la somme et le produit des racines

Dans chaque cas, utiliser la somme et le produit des racines sans calculer de discriminant.

- 1) On considère $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Vérifier que 2 est une racine de f , puis déterminer l'autre racine et factoriser $f(x)$.
- 2) Trouver deux nombres dont la somme vaut 9 et le produit vaut 14 . En déduire une factorisation de $x^2 - 9x + 14$.
- 3) On considère $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Sachant que 1 est une racine de g , déterminer l'autre racine, puis écrire g sous forme factorisée.

3 - Forme canonique et variations

Définition : Forme canonique

Une fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

où a , α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f . Elle permet de lire l'extremum de la fonction et les coordonnées du sommet de sa parabole.

Propriété : Passer de la forme développée à la forme canonique

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où $a \neq 0$. Alors f peut s'écrire sous la forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Démonstration : Forme canonique

On part de la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Or $x + \frac{b}{2a} = x - \left(-\frac{b}{2a} \right)$. En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$, on obtient

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

SF 1.6 : Écrire un polynôme du second degré sous forme canonique

Écrire chaque fonction sous forme canonique.

1) $A(x) = x^2 + 4x - 1$

2) $B(x) = 2x^2 - 4x + 6$

3) $C(x) = -x^2 + 2x + 5$

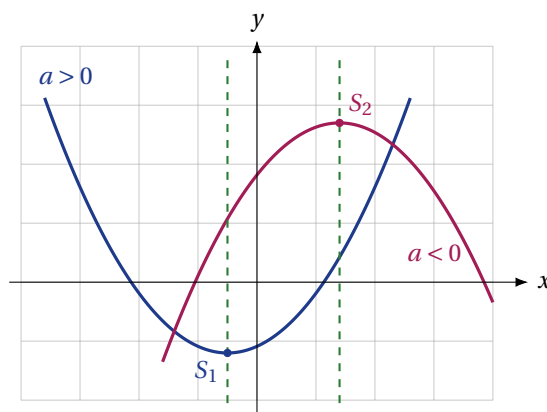
4) $D(x) = 3x^2 - x + 1$

Méthode :

On repère le début du développement d'un carré. Par exemple, $x^2 + 4x$ est le début de $(x+2)^2$, car $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

Définition : Parabole, sommet et axe de symétrie

Si $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, alors le point $S(\alpha; \beta)$ est le **sommet** de la parabole. La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.



Propriété : Variations et extremum

Soit f une fonction polynôme du second degré écrite sous forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $]-\infty; \alpha[$, puis croissante sur $]\alpha; +\infty[$. Elle admet un **minimum** égal à β , atteint pour $x = \alpha$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

Si $a < 0$, alors f est croissante sur $]-\infty; \alpha[$, puis décroissante sur $]\alpha; +\infty[$. Elle admet un **maximum** égal à β , atteint pour $x = \alpha$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

Démonstration : Variations à partir de la forme canonique

On suppose d'abord que $a > 0$. Comme la fonction carré décroît sur $]-\infty; 0[$ et croît sur $]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto (x - \alpha)^2$ décroît jusqu'à α , puis croît après α .

Multiplier par le réel positif a conserve l'ordre, puis ajouter β ne change pas le sens de variation. Donc f est décroissante sur $]-\infty; \alpha[$, puis croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

Si $a < 0$, multiplier par a change l'ordre. Les variations sont alors inversées.

Exemple : Pour $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$, on a $a = 2 > 0$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$. Comme $2(x - 1)^2 \geq 0$, on a $f(x) \geq 3$ pour tout réel x . La fonction f admet donc un minimum en 1, égal à 3.

SF 1.7 : Déterminer le sommet, l'axe de symétrie et les variations

Pour chaque fonction, déterminer la forme canonique, le sommet de la parabole, l'axe de symétrie et le tableau de variations.

1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

2) $g(x) = -x^2 - 2x + 8$

3) $h(x) = x^2 + 6x + 5$

4) $p(x) = -3x^2 + 12x - 7$

Méthode :

On calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$. Le sommet est $S(\alpha; \beta)$, l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$, et le signe de a donne le sens des variations.

SF 1.8 : Choisir la forme la plus adaptée

Dans chaque situation, déterminer l'expression de la fonction polynôme du second degré représentée par une parabole $\mathcal{P}$.

- 1) La parabole $\mathcal{P}$ a pour sommet $S(-1; 2)$ et passe par le point $A(2; 20)$.
- 2) La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 5 , et passe par le point $C(2; -18)$.
- 3) La parabole $\mathcal{P}$ passe par les points $A(0; 1)$, $B(-1; 3)$ et $C(1; 5)$.

Méthode :

La forme canonique est adaptée lorsque l'on connaît le sommet. La forme factorisée est adaptée lorsque l'on connaît les racines. La forme développée est adaptée lorsque l'on connaît plusieurs points quelconques.