

# 1<sup>re</sup> spé – Chapitre n°2

## Nombre dérivé

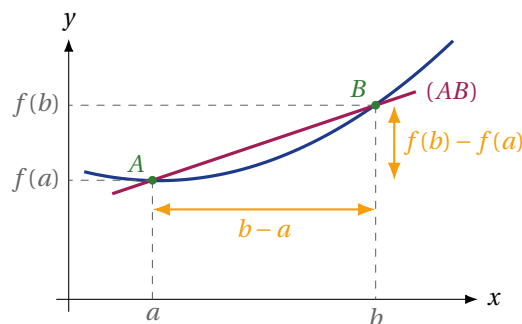
### 1 - Taux de variation et nombre dérivé

#### Définition : Taux de variation entre deux nombres

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts de  $I$ . On appelle **taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $b$**  le nombre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ce nombre est aussi le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe représentative de  $f$  passant par les points  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$ .



**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 + 1$ . Le taux de variation de  $f$  entre 2 et 5 est

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{26 - 5}{3} = 7.$$

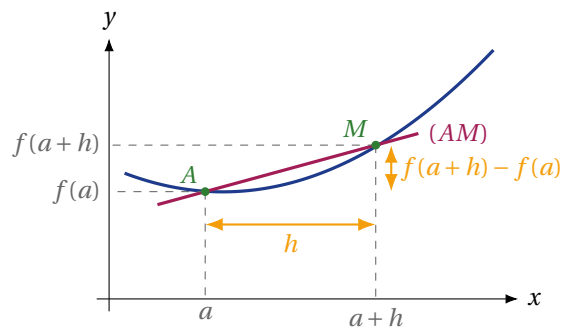
La sécante correspondante a donc pour coefficient directeur 7.

#### Définition : Taux de variation entre $a$ et $a + h$

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Soit  $a \in I$ . Pour tout réel  $h \neq 0$  tel que  $a + h \in I$ , le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  est

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ce nombre est le coefficient directeur de la droite sécante passant par les points  $A(a; f(a))$  et  $M(a + h; f(a + h))$ .



### SF 2.1 : Calculer un taux de variation et la pente d'une sécante

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 - x$ .

- 1) Calculer le taux de variation de  $f$  entre 2 et  $2 + h$ , avec  $h \neq 0$ .
- 2) Calculer le coefficient directeur de la sécante à la courbe représentative de  $f$  passant par les points d'abscisses 1 et 4.

#### Méthode :

Pour calculer un taux de variation, on commence par calculer les images nécessaires. On remplace ensuite dans la formule  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , ou dans la formule  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  lorsque le second point a pour abscisse  $a + h$ .

### Définition : Nombre dérivé

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , et soit  $a \in I$ . Lorsque le taux de variation  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  tend vers un nombre réel lorsque  $h$  tend vers 0, on dit que  $f$  est **dérivable en  $a$** .

Ce nombre est appelé **nombre dérivé de  $f$  en  $a$** . Il est noté  $f'(a)$ , et on écrit

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### Propriété : Existence du nombre dérivé

Le nombre dérivé n'existe pas toujours. Pour que  $f$  soit dérivable en  $a$ , il faut que le taux de variation tende vers un seul nombre réel lorsque  $h$  tend vers 0.

Si le taux de variation tend vers  $+\infty$ , vers  $-\infty$ , ou vers deux valeurs différentes selon que  $h$  tend vers 0 par valeurs positives ou négatives, alors  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ .

### SF 2.2 : Calculer un nombre dérivé à partir de la définition

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le nombre dérivé en 2 à partir de la définition.

1)  $f(x) = x$

2)  $g(x) = x^2$

3)  $i(x) = \frac{1}{x}$

#### Méthode :

Pour calculer le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ , on calcule d'abord  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  avec  $h \neq 0$ , puis on simplifie avant de faire tendre  $h$  vers 0.

### SF 2.3 : Interpréter un nombre dérivé comme une vitesse instantanée

La distance parcourue par une balle, en mètres,  $t$  secondes après avoir été lâchée, est modélisée par la fonction  $d$  définie par  $d(t) = 4,9t^2$ .

- 1) Calculer la vitesse moyenne de la balle entre 0,5 seconde et 0,54 seconde.
- 2) Pour  $h \neq 0$ , calculer le taux de variation  $\frac{d(0,5+h) - d(0,5)}{h}$ .
- 3) En déduire la vitesse instantanée de la balle à l'instant  $t = 0,5$ .

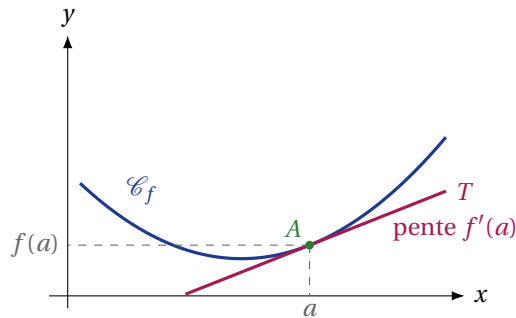
#### Méthode :

Une vitesse moyenne est un taux de variation. Une vitesse instantanée est un nombre dérivé. Si  $d(t)$  est une distance en mètres et  $t$  un temps en secondes, alors  $d'(a)$  s'exprime en mètres par seconde.

## 2 - Tangente et approximation affine

### Définition : Tangente en un point

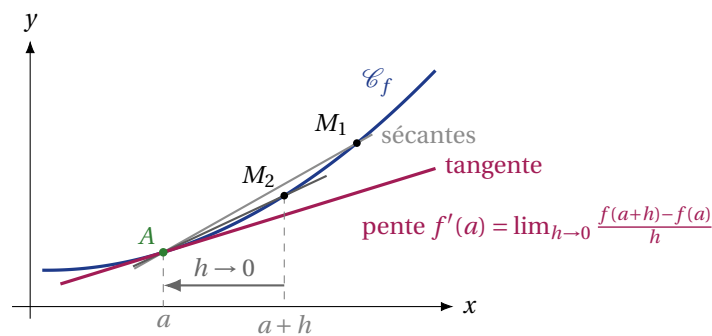
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , dérivable en un réel  $a \in I$ . On appelle **tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$**  la droite qui passe par le point  $A(a; f(a))$  et dont le coefficient directeur est  $f'(a)$ .



### Propriété : Lien entre nombre dérivé et tangente

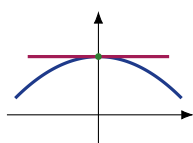
Lorsque  $h$  tend vers 0, le point  $M(a+h; f(a+h))$  se rapproche du point  $A(a; f(a))$ . La sécante  $(AM)$  se rapproche alors d'une position limite : la tangente en  $A$ .

Le nombre dérivé  $f'(a)$  est le coefficient directeur de cette tangente.

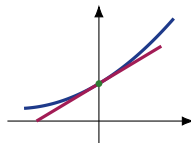


### Propriété : Quelques cas possibles

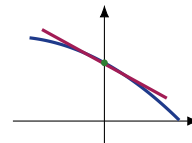
Le signe du nombre dérivé indique l'inclinaison de la tangente.



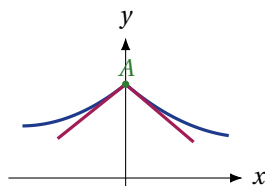
Nombre dérivé nul  
 $f'(a) = 0$



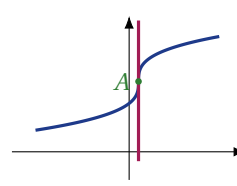
Nombre dérivé positif  
 $f'(a) > 0$



Nombre dérivé négatif  
 $f'(a) < 0$



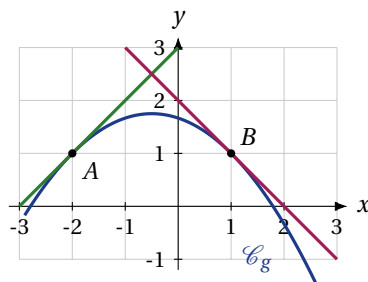
Non dérivable en  $a$   
Deux demi-tangentes différentes



Non dérivable en  $a$   
Tangente verticale : pas de coefficient directeur réel

### SF 2.4 : Déterminer graphiquement un nombre dérivé

On a tracé ci-dessous la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  d'une fonction  $g$ , ainsi que deux tangentes.



- 1) Déterminer graphiquement  $g'(-2)$ .
- 2) Déterminer graphiquement  $g'(1)$ .

#### Méthode :

Le nombre dérivé  $g'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a$ . On lit donc la pente de la tangente, et non la pente de la courbe elle-même.

### SF 2.5 : Construire une tangente à partir du nombre dérivé

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = -x^2 + 3.$$

On admet que  $f$  est dérivable en 1 et que  $f'(1) = -2$ .

- 1) Calculer les coordonnées du point A de la courbe d'abscisse 1.
- 2) Tracer la tangente à la courbe au point A.

#### Méthode :

Pour tracer une droite de coefficient directeur  $-2$ , on peut partir du point de contact, avancer d'une unité vers la droite, puis descendre de deux unités.

### Propriété : Équation de la tangente

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , dérivable en  $a \in I$ . La tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

### Démonstration : Équation de la tangente

La tangente au point d'abscisse  $a$  a pour coefficient directeur  $f'(a)$ . Son équation réduite est donc de la forme

$$y = f'(a)x + p, \quad \text{où } p \text{ est un réel.}$$

Comme cette tangente passe par le point  $A(a; f(a))$ , ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. On obtient donc

$$f(a) = f'(a) \times a + p.$$

Ainsi,

$$p = f(a) - af'(a).$$

En remplaçant  $p$ , on obtient

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2$ . On cherche l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. On sait que  $f(1) = 1$  et que  $f'(1) = 2$ . La tangente a donc pour équation

$$y = 2(x - 1) + 1,$$

c'est-à-dire

$$y = 2x - 1.$$

### SF 2.6 : Déterminer une équation de tangente

Pour chaque fonction, déterminer une équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse demandé.

1)  $f(x) = x^2$ , au point d'abscisse 3.

2)  $g(x) = 2x^2 - x + 1$ , au point d'abscisse 1.

3)  $h(x) = \frac{1}{x}$ , au point d'abscisse 2, en admettant que  $h'(2) = -\frac{1}{4}$ .

4)  $p(x) = -x^2 + 4x$ , au point d'abscisse 0.

#### Méthode :

Pour déterminer une équation de tangente au point d'abscisse  $a$ , on calcule  $f(a)$  et  $f'(a)$ , puis on remplace dans la formule  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

### Définition : Fonction affine tangente

Soit  $f$  une fonction dérivable en un réel  $a$ . La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée **fonction affine tangente de  $f$  en  $a$** .

### Propriété : Approximation affine locale

Soit  $f$  une fonction dérivable en un réel  $a$ .

Pour  $x$  suffisamment proche de  $a$ , on a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Soit, pour  $h$  suffisamment proche de 0, on a :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Ainsi,  $f(a) + hf'(a)$  est une **approximation** de  $f(a + h)$ .

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction carré. On sait que  $f(1) = 1$  et  $f'(1) = 2$ . Donc, pour  $h$  proche de 0,  $f(1 + h) \approx f(1) + hf'(1)$ . On obtient alors :

$$(1 + h)^2 \approx 1 + 2h$$

### SF 2.7 : Utiliser une tangente pour approximer une valeur

1) On considère  $f(x) = x^2$ . En utilisant l'approximation affine au point d'abscisse 1, donner une valeur approchée de  $1,02^2$ .

2) On considère une fonction  $g$  telle que  $g(5) = 12$  et  $g'(5) = -0,4$ . Donner une valeur approchée de  $g(5,1)$ .

### SF 2.8 : Interpréter un nombre dérivé dans un contexte

La concentration d'un produit, en millimoles par litre, est modélisée par une fonction  $c$  du temps  $t$ , exprimé en minutes.

1) On lit graphiquement que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour pente 0,1. Interpréter  $c'(0) = 0,1$  dans le contexte de l'exercice.

2) On lit graphiquement que  $c'(3) = 1,5$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

#### Méthode :

Lorsque la fonction modélise une grandeur en fonction du temps, le nombre dérivé représente une vitesse instantanée d'évolution. Ici, il s'exprime en millimoles par litre et par minute.