

1^{re} spé – Chapitre n°3

Équations du second degré

1 - Résolution d'équations du second degré

Définition : Équation du second degré et racines

Une **équation du second degré** est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Autrement dit, un réel x_0 est une racine lorsque

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

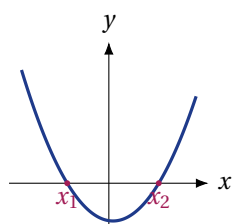
Rappel du chapitre 1 : si une fonction polynôme du second degré admet deux racines x_1 et x_2 , alors elle peut s'écrire sous la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple : Pour $f(x) = x^2 - 5x + 6$, on a $f(2) = 0$ et $f(3) = 0$. Les nombres 2 et 3 sont donc les racines de f , et l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a pour solutions 2 et 3.

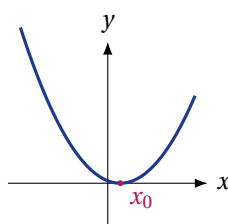
Propriété : Interprétation graphique

Soit f une fonction polynôme du second degré. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection entre la parabole représentant f et l'axe des abscisses.

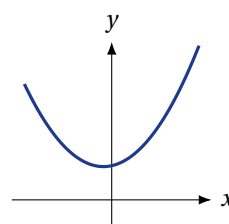
Une équation du second degré peut donc avoir deux solutions réelles, une seule solution réelle, ou aucune solution réelle.



Deux solutions



Une solution



Aucune solution

Définition : Discriminant

Soit le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre réel, noté Δ , défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le signe de Δ permet de connaître le nombre de solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

On considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, alors l'équation a **deux solutions réelles distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution réelle, appelée **racine double** :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a **pas de solution réelle**.

Démonstration : Formule des solutions

D'après la forme canonique vue au chapitre 1, on peut écrire

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ revient donc à résoudre

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Si $\Delta > 0$, le membre de droite est strictement positif : il y a deux solutions. Si $\Delta = 0$, le membre de droite est nul : il y a une seule solution. Si $\Delta < 0$, le membre de droite est négatif : il n'y a pas de solution réelle, car un carré est toujours positif ou nul.

Propriété : Somme et produit des racines

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Lorsque le trinôme admet deux racines x_1 et x_2 , éventuellement égales, on a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Rappel du chapitre 1 : ces relations sont particulièrement utiles lorsqu'une racine est évidente. Si une racine est connue, l'autre se trouve souvent plus vite avec la somme ou le produit des racines qu'avec les formules complètes.

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Méthode 1 : calculer le discriminant Δ , puis utiliser la propriété de résolution. Cette méthode est systématique.

Méthode 2 : chercher une racine évidente, puis utiliser la somme ou le produit des racines pour trouver l'autre racine. Cette méthode est plus rapide, mais elle ne fonctionne pas toujours.

Méthode 3 : factoriser directement à l'aide d'un facteur commun, de la distributivité ou d'une identité remarquable, puis résoudre une équation-produit. Cette méthode est souvent la plus courte lorsqu'une factorisation est visible.

SF 3.1 : Résoudre une équation du second degré avec le discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

2) $x^2 + 6x + 5 = 0$

3) $4x^2 + x + 5 = 0$

4) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

5) $8x^2 - 16x = 0$

6) $x^2 + 8x + 14 = 0$

SF 3.2 : Choisir la méthode la plus adaptée pour résoudre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en choisissant, pour chacune, une méthode efficace.

1) $x^2 - 5x = 0$

2) $x^2 - 9 = 0$

3) $3x^2 + 11x - 4 = 0$

4) $4x^2 + 12x - 7 = 0$

5) $9x^2 - 4 = 0$

6) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Méthode :

Avant de calculer Δ , on regarde s'il existe une factorisation évidente : facteur commun, identité remarquable, racine évidente comme 0, 1, -1, 2 ou -2.

SF 3.3 : Utiliser une racine évidente, la somme et le produit

On considère les fonctions suivantes. Pour chacune, vérifier que la racine proposée est bien une racine, puis déterminer l'autre racine sans utiliser les formules avec Δ .

1) $f(x) = x^2 - 7x + 10$, racine proposée : 2.

2) $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, racine proposée : -2.

3) $h(x) = 3x^2 - 12x + 9$, racine proposée : 1.

4) $p(x) = -x^2 + 5x - 6$, racine proposée : 2.

2 - Factorisation et signe

Propriété : Factorisation d'un trinôme du second degré

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 , et

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$, alors f admet une racine double x_0 , et

$f(x) = a(x - x_0)^2$

Si $\Delta < 0$, alors f n'admet aucune racine réelle et **ne peut pas se factoriser** en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.

Propriété : Signe d'un trinôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$, alors f ne s'annule pas et garde le signe de a sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Si $\Delta = 0$, alors f s'annule seulement en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et garde le signe de a ailleurs.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

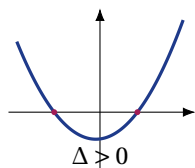
Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines x_1 et x_2 , avec $x_1 < x_2$. Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe opposé à celui de a entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

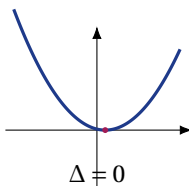
Propriété : Interprétation avec la parabole

Le signe du trinôme se lit aussi sur la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses.

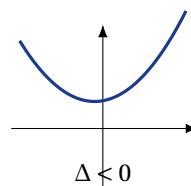
Lorsque $f(x) > 0$, la parabole est au-dessus de l'axe des abscisses. Lorsque $f(x) < 0$, elle est en dessous. Lorsque $f(x) = 0$, elle coupe ou touche l'axe des abscisses.



Deux intersections



Une intersection



Aucune intersection

SF 3.4 : Factoriser un trinôme du second degré

Factoriser, lorsque c'est possible dans $\mathbb{R}$, les trinômes suivants.

1) $f(x) = 3x^2 + 11x - 4$

2) $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

3) $h(x) = 4x^2 - 14x$

4) $p(x) = 9x^2 - 4$

5) $q(x) = x^2 + 4x + 4$

6) $r(x) = 6x^2 + x + 1$

Méthode :

On peut factoriser directement lorsqu'on reconnaît un facteur commun ou une identité remarquable. Sinon, on cherche les racines avec le discriminant, puis on utilise $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $f(x) = a(x - x_0)^2$.

SF 3.5 : Déterminer le signe d'un trinôme du second degré

Dans chaque cas, étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

1) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

2) $f(x) = -3x^2 + 4x + 7$

3) $f(x) = 6x^2 + x + 1$

Méthode :

Pour déterminer le signe d'un trinôme du second degré, on commence par chercher ses racines éventuelles. On utilise ensuite la règle : signe de a à l'extérieur des racines, signe opposé entre les racines.

SF 3.6 : Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $x^2 - 8x + 7 > 0$

2) $-5x^2 + 2x - 3 < 0$

3) $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$

4) $x^2 + 4x + 4 \geq 0$

Méthode :

On met d'abord l'inéquation sous la forme $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$. On construit ensuite le tableau de signes, puis on lit l'ensemble des solutions.

SF 3.7 : Choisir une forme adaptée pour résoudre un problème

Pour chaque situation, choisir la forme la plus adaptée du trinôme, puis répondre à la question posée.

- 1) Une parabole coupe l'axe des abscisses en -1 et 5 , et passe par le point $A(2; -18)$. Déterminer l'expression de la fonction polynôme du second degré associée.
- 2) On considère $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole, puis dire si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, une solution ou aucune solution.
- 3) On considère $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. Résoudre $g(x) \geq 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

Méthode :

La forme développée est pratique pour calculer Δ . La forme factorisée est pratique pour résoudre une équation et étudier un signe. La forme canonique est pratique pour lire un extremum et comprendre la position globale de la parabole.