

1^{re} spé – Chapitre n°4

Fonction dérivée

1 - Fonctions dérivées

Définition : Fonction dérivable sur un intervalle

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable sur I** lorsqu'elle est dérivable en tout réel x de I .

Lorsque f est dérivable sur I , la fonction qui à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée de f** . Elle est notée f' .

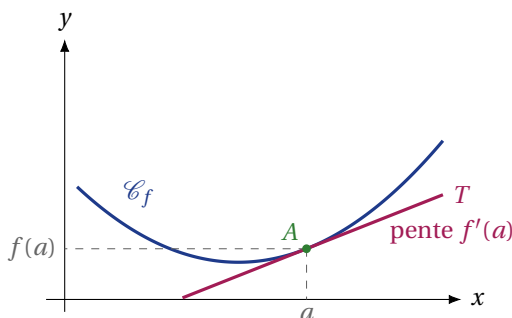
On écrit alors :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Exemple : Si $f(x) = x^2$, alors la fonction dérivée de f est la fonction f' définie par $f'(x) = 2x$. Le nombre dérivé en 3 est donc $f'(3) = 6$.

Propriété : Interprétation graphique (rappel chap n°2)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Pour tout réel $a \in I$, le nombre $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .



SF 4.1 : Déterminer une fonction dérivée à partir de la définition

On considère les fonctions f , g et k définies par :

$$f(x) = x, \quad g(x) = 5x + 3, \quad k(x) = x^2.$$

- 1) Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ à partir de la définition.
- 2) Déterminer la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$ à partir de la définition.
- 3) Déterminer la fonction dérivée de k sur $\mathbb{R}$ à partir de la définition.

Méthode :

Pour déterminer $f'(x)$ à partir de la définition, on calcule le taux de variation entre a et $a + h$, c'est-à-dire $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, puis on simplifie avant de faire tendre h vers 0.

SF 4.2 : Relier nombre dérivé, fonction dérivée et tangente

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que

$$f(2) = 5 \quad \text{et} \quad f'(2) = -3.$$

- 1) Donner les coordonnées du point de la courbe de f d'abscisse 2.
- 2) Donner le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2.
- 3) En déduire une équation de cette tangente.

2 - Dérivées des fonctions usuelles

Propriété : Tableau des dérivées usuelles

Les fonctions usuelles suivantes sont dérivables sur les intervalles indiqués.

Fonction	Expression de $f(x)$	Dérivable sur	Expression de $f'(x)$
Constante	$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Carré	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
Puissance entière positive	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Puissance entière négative	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}, n < 0$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration : Dérivée de la fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour $h \neq 0$ et $a + h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\
 &= \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} \\
 &= \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} \\
 &= -\frac{1}{a(a+h)}.
 \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers $-\frac{1}{a^2}$. Donc la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Démonstration : Non-dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

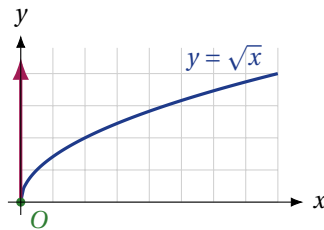
La fonction racine carrée est définie en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Pour $h > 0$, le taux de variation entre 0 et h vaut :

$$\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h tend vers 0 par valeurs positives, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$. Le taux de variation ne tend donc pas vers un nombre réel.

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.



SF 4.3 : Utiliser les dérivées des fonctions usuelles

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

1) $f(x) = 7$

2) $g(x) = x^5$

3) $h(x) = \frac{1}{x^4}$

4) $p(x) = \sqrt{x}$

5) $q(x) = x^{-3}$

6) $r(x) = x^3$

Méthode :

On identifie d'abord la fonction usuelle utilisée, puis on applique la formule du tableau. Pour une puissance négative ou une fonction inverse, on travaille sur $\mathbb{R}^*$. Pour la fonction racine carrée, la dérivée existe seulement sur $]0; +\infty[$.

SF 4.4 : Calculer un nombre dérivé à l'aide de la fonction dérivée

Pour chaque fonction, déterminer la fonction dérivée, puis calculer le nombre dérivé demandé.

1) $f(x) = x^2$, calculer $f'(4)$.

2) $g(x) = x^3$, calculer $g'(-2)$.

3) $h(x) = \frac{1}{x}$, calculer $h'(5)$.

4) $p(x) = \sqrt{x}$, calculer $p'(9)$.

3 - Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété : Somme et multiplication par un réel

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et soit k un réel. Alors les fonctions $u + v$ et ku sont dérivables sur I , et :

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (ku)' = ku'$$

En particulier, une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$. On dérive chaque terme séparément.

Exemple : Pour $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$, on obtient, pour tout réel x ,

$$f'(x) = 3 \times 2x - 2 \times 1 + 0 = 6x - 2.$$

SF 4.5 : Calculer la dérivée d'une fonction polynôme

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

2) $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x + 4$

3) $h(x) = 7x^5 - 2x^4 + x^2 - 9$

4) $p(x) = -5x^2 + 8x - 11$

Méthode :

On utilise la dérivée d'une somme et la formule $(kx^n)' = knx^{n-1}$.

Propriété : Produit de deux fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors le produit uv est dérivable sur I , et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

En particulier, u^2 est dérivable sur I , et :

$$(u^2)' = 2uu'$$

Démonstration : Dérivée d'un produit

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et soit $a \in I$. Pour $h \neq 0$, le taux de variation de la fonction produit de u et v entre a et $a + h$ est :

$$\tau = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}.$$

On ajoute et on retranche $u(a)v(a+h)$ au numérateur :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h}. \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, on obtient

$$\tau \longrightarrow u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

Donc le produit uv est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

SF 4.6 : Calculer la dérivée d'un produit

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 4)$

2) $g(x) = x\sqrt{x}$

3) $h(x) = (2x^3 - 1)(x^2 + x)$

4) $p(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 3)$

Méthode :

On pose u et v , on calcule u' et v' , puis on applique $(uv)' = u'v + uv'$.

Propriété : Inverse et quotient

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , avec $v(x) \neq 0$ pour tout réel $x \in I$. Alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I , et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

SF 4.7 : Calculer la dérivée d'un quotient

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$

2) $g(x) = \frac{x^2 + 4}{x + 1}$

3) $h(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

4) $p(x) = \frac{4x + 5}{-3x + 6}$

Méthode :

Avant de dériver un quotient, on détermine les valeurs interdites, c'est-à-dire les valeurs qui annulent le dénominateur. On applique ensuite la formule du quotient sur chacun des intervalles où le dénominateur ne s'annule pas.

SF 4.8 : Choisir la formule de dérivation adaptée

Pour chacune des fonctions suivantes, choisir la formule de dérivation adaptée, puis déterminer la fonction dérivée.

1) $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{x} + 7$

2) $g(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

3) $h(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 3}$

4) $p(x) = (x^2 + 4)^2$

Méthode :

On simplifie d'abord l'expression lorsque c'est possible. On choisit ensuite la règle adaptée : somme, produit, quotient ou composée.