

1^{re} spé – Chapitre n°5

Suites numériques

1 - Premières définitions

Définition : Suite numérique

Une **suite numérique** est une fonction dont la variable est un entier naturel et dont les valeurs sont des nombres réels. À chaque entier naturel autorisé, on associe un réel.

On note généralement une suite (u_n) . L'image de l'entier n est notée u_n , et se lit « u indice n ». Le nombre u_n est appelé le **terme de rang n** ou le **terme général** de la suite.

L'ensemble de définition d'une suite est souvent $\mathbb{N}$, mais il peut aussi être une partie de $\mathbb{N}$, par exemple les entiers naturels non nuls. Lorsque le premier terme est u_0 , le terme u_n est le $(n+1)$ -ième terme de la suite. Lorsque le premier terme est u_1 , le terme u_n est le n -ième terme de la suite.

Exemple : Si une suite (u_n) commence par $u_0 = 7$, alors u_0 est le premier terme, u_1 est le deuxième terme et u_2 est le troisième terme. Si une suite (v_n) commence par $v_1 = 7$, alors v_1 est le premier terme et v_2 est le deuxième terme.

Définition : Suite définie explicitement

Une suite (u_n) est définie **explicitement** lorsqu'il existe une fonction f telle que, pour tout entier naturel n de l'ensemble de définition,

$$u_n = f(n)$$

Dans ce cas, chaque terme se calcule directement à partir de son rang, sans avoir besoin des termes précédents.

Exemple : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 2n - 1$ est définie explicitement. On peut calculer directement $u_{10} = 10^2 + 2 \times 10 - 1 = 119$.

Définition : Suite définie par récurrence

Une suite (u_n) est définie **par récurrence** lorsqu'on donne un ou plusieurs premiers termes, puis une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Très souvent, une suite définie par récurrence est donnée sous la forme

$$\begin{cases} u_0 = \text{valeur initiale}, \\ u_{n+1} = F(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans ce cas, pour calculer u_5 , il faut d'abord calculer u_1 , puis u_2 , puis u_3 , puis u_4 .

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ est définie par récurrence. On obtient $u_1 = 5$, $u_2 = 9$, puis $u_3 = 17$.

Propriété : Représentation graphique d'une suite

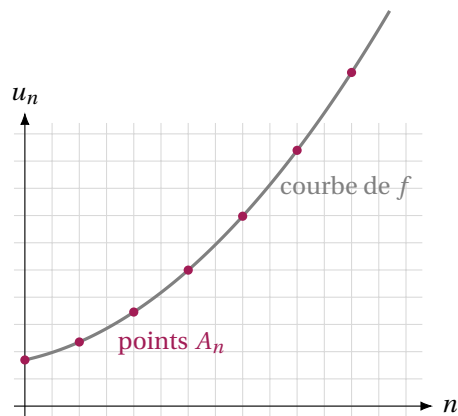
Pour représenter graphiquement une suite (u_n) , on place dans un repère les points de coordonnées

$$A_n(n; u_n).$$

La représentation graphique d'une suite est donc un **nuage de points**. On ne relie pas ces points entre eux, car une suite n'est définie que pour des valeurs entières de l'indice.

Si la suite est définie explicitement par $u_n = f(n)$, alors les points $A_n(n; u_n)$ appartiennent à la courbe représentative de

la fonction f , mais seulement pour les abscisses entières.



SF 5.1 : Calculer les termes d'une suite

1) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = n^2 - 4n + 1.$$

Calculer u_0, u_1, u_5 , puis exprimer u_{n+1} en fonction de n .

2) On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 3$ et, pour tout entier naturel non nul n , par

$$v_{n+1} = 2v_n - 1.$$

Calculer v_2, v_3 et v_4 .

3) On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1, w_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n , par

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n.$$

Calculer les six premiers termes de la suite.

Méthode :

Pour une suite définie explicitement, on remplace directement n par la valeur demandée. Pour une suite définie par récurrence, on calcule les termes dans l'ordre, sans sauter d'étape.

SF 5.2 : Utiliser un algorithme pour générer une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable A contienne le terme u_N .

Initialisation	$A \leftarrow \dots$ $N \leftarrow \text{rang demandé}$
Traitement	Pour i allant de 1 à N faire $A \leftarrow \dots$ Fin Pour
Sortie	Afficher A

3) Écrire une fonction Python permettant de calculer u_N .

2 - Sens de variation d'une suite

Définition : Suites croissante, décroissante et monotone

Soit (u_n) une suite numérique.

La suite (u_n) est dite **croissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

La suite (u_n) est dite **décroissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite (u_n) est dite **constante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier naturel $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = u_n.$$

Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante, décroissante ou constante.

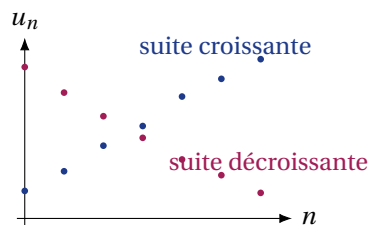
Exemple : La suite des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \dots$ est croissante. La suite définie par $u_n = 10 - n$ est décroissante. Une suite peut aussi ne pas être monotone, par exemple $1, -1, 1, -1, \dots$

Propriété : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) , on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si, pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante à partir de ce rang.

Si, pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.



Démonstration : Justification de la méthode par différence

Dire que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ revient exactement à dire que $u_{n+1} \geq u_n$. Donc, si cette inégalité est vraie pour tout entier n à partir d'un certain rang, chaque terme est supérieur ou égal au précédent : la suite est croissante à partir de ce rang.

De même, dire que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ revient exactement à dire que $u_{n+1} \leq u_n$. Dans ce cas, la suite est décroissante à partir du rang considéré.

Propriété : Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque les termes sont positifs

Lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Si $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$, donc la suite est croissante.

Si $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite est décroissante.

Cette méthode ne doit être utilisée que lorsque les termes par lesquels on divise sont **strictement positifs**.

Propriété : Utiliser les variations d'une fonction associée

Si une suite est définie explicitement par $u_n = f(n)$, alors on peut utiliser les variations de la fonction f .

Si f est croissante sur un intervalle contenant tous les entiers n à partir d'un rang n_0 , alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 .

Si f est décroissante sur un intervalle contenant tous les entiers n à partir d'un rang n_0 , alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 .

SF 5.3 : Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Déterminer le sens de variation des suites suivantes, en précisant si nécessaire à partir de quel rang le résultat est valable.

1) Pour tout entier naturel n , $u_n = n^2 - 3n + 1$.

2) Pour tout entier naturel n , $v_n = -2n + 5$.

3) Pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{n}{n+1}$.

Méthode :

On calcule $u_{n+1} - u_n$, puis on étudie son signe. Lorsque l'expression dépend de n , il faut bien préciser à partir de quel rang le signe est toujours le même.

SF 5.4 : Choisir une méthode pour étudier les variations d'une suite

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite proposée.

1) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

2) La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = \frac{3}{n+2}.$$

3) La suite (w_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$w_n = n^2 + 2n.$$

Méthode :

La différence $u_{n+1} - u_n$ fonctionne dans presque toutes les situations. Pour une suite explicite, on peut aussi utiliser la fonction associée. Pour une suite à termes strictement positifs, le quotient peut parfois simplifier les calculs.

3 - Notion de limite

Définition : Limite finie et suite convergente

On s'intéresse au comportement d'une suite (u_n) lorsque l'indice n devient de plus en plus grand.

Lorsqu'en augmentant indéfiniment n , les termes u_n se rapprochent aussi près que l'on veut d'un réel L , on dit que la suite (u_n) **converge vers L** .

Le réel L est appelé la **limite** de la suite. On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

Une suite qui admet une limite finie est dite **convergente**.

Exemple : Pour la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$, les premiers termes sont 3, 2,5, 2,333..., 2,25, 2,2, ... Ils semblent se rapprocher de 2. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Définition : Limites infinies et divergence

Si, en augmentant indéfiniment n , les termes u_n deviennent plus grands que n'importe quel nombre réel donné à l'avance, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Si les termes u_n deviennent plus petits que n'importe quel nombre réel donné à l'avance, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$. On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**. Elle peut diverger vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou ne pas avoir de limite du tout.

Exemple : La suite définie par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$. La suite définie par $v_n = -n$ diverge vers $-\infty$. La suite définie par $w_n = (-1)^n$ diverge, mais elle n'a pas de limite infinie : ses termes alternent entre 1 et -1.

Propriété : Conjecturer une limite

Pour conjecturer la limite éventuelle d'une suite, on peut calculer des termes de rang de plus en plus grand, construire un tableau de valeurs ou observer une représentation graphique.

n	1	2	5	10	50	100	500
$u_n = 3 - \frac{1}{n}$	2	2,5	2,8	2,9	2,98	2,99	2,998

Ce tableau permet de conjecturer que la suite (u_n) semble converger vers 3. Une conjecture n'est cependant pas une démonstration : elle donne une idée du comportement de la suite.

SF 5.5 : Conjecturer la limite éventuelle d'une suite

Pour chacune des suites suivantes, calculer quelques termes de rang élevé, puis conjecturer la limite éventuelle.

1) Pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 4 - \frac{3}{n+1}.$$

2) Pour tout entier naturel n ,

$$v_n = (-1)^n.$$

3) La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par

$$w_{n+1} = \sqrt{2w_n}.$$

Méthode :

On calcule les premiers termes, puis des termes de rang plus grand. Un tableur, une calculatrice ou un petit programme Python peuvent aider à observer le comportement de la suite.

SF 5.6 : Déterminer un seuil

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = 4 - \frac{5}{n+1}.$$

Déterminer un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à moins de 0,01 de 4.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = n^2 - 4.$$

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 1000$.

SF 5.7 : Reconnaître différents comportements possibles

Associer chaque suite au comportement qui semble convenir : convergence vers un réel, divergence vers $+\infty$, divergence vers $-\infty$, ou divergence sans limite.

- 1) $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$, pour tout entier naturel n .
- 2) $v_n = -3n+2$, pour tout entier naturel n .
- 3) $w_n = (-1)^n$, pour tout entier naturel n .
- 4) $t_n = n^2 - 10n$, pour tout entier naturel n .

Méthode :

Il faut distinguer « les termes deviennent très grands », « les termes se rapprochent d'un nombre ». Une suite peut aussi ne pas se stabiliser autour d'une valeur, par exemple si elle oscille.