

1^{re} spé – Chapitre n°6

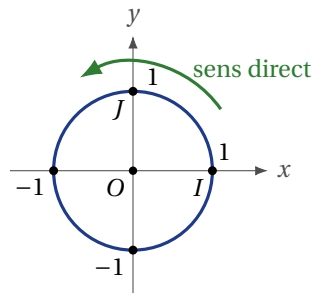
Le cercle trigonométrique

1 - Repérage sur le cercle trigonométrique

Définition : Sens direct et cercle trigonométrique

Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique.



Exemple : Le point I a pour coordonnées $(1; 0)$ et le point J a pour coordonnées $(0; 1)$. Un quart de tour dans le sens direct fait passer de I à J .

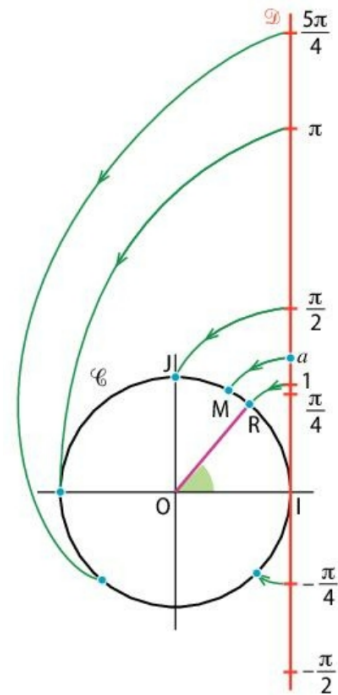
Définition : Enroulement de la droite numérique et radian

On considère la tangente au cercle trigonométrique au point I . Cette droite est munie d'un repère d'origine I , orienté vers le haut : elle représente l'ensemble des nombres réels.

Par **enroulement de la droite numérique** autour du cercle trigonométrique, on associe à tout réel x un unique point M du cercle. Ce point est appelé le **point image du réel x** sur le cercle trigonométrique.

Un **radian** est la mesure de l'angle géométrique qui intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique. Il s'agit de l'angle $\widehat{TOR}$ de la figure ci-contre.

Comme le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre vaut 2π . Un tour complet mesure donc 2π radians, un demi-tour mesure π radians et un quart de tour mesure $\frac{\pi}{2}$ radians.



Propriété : Réels ayant le même point image

Sur le cercle trigonométrique, faire un tour complet correspond à parcourir une longueur égale à 2π .

Ainsi, si M est le point image du réel x , alors M est aussi le point image de tous les réels de la forme

$$x + 2k\pi,$$

où k est un entier relatif. Le nombre entier k représente un nombre de tours : dans le sens direct si $k > 0$, dans le sens indirect si $k < 0$.

Exemple : Les réels $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $\frac{\pi}{3} - 2\pi$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{3}$, ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Propriété : Conversion entre degrés et radians

La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés.

Comme $180^\circ = \pi$ radians, on a

$$\text{mesure en radians} = \text{mesure en degrés} \times \frac{\pi}{180}.$$

Réciproquement,

$$\text{mesure en degrés} = \text{mesure en radians} \times \frac{180}{\pi}.$$

Angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

SF 6.1 : Placer un point sur le cercle trigonométrique

On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Placer sur ce cercle les points images des réels suivants :

- 1) $\frac{\pi}{2}$ 2) π 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{5\pi}{4}$ 5) $\frac{17\pi}{6}$

Méthode :

On commence par ramener le réel donné dans un intervalle de longueur 2π , par exemple $[0; 2\pi[$ ou $[-\pi; \pi[$. On place ensuite le point image en tenant compte du sens direct ou indirect.

SF 6.2 : Déterminer des réels ayant le même point image

Dans chaque cas, donner deux autres réels ayant le même point image sur le cercle trigonométrique.

- 1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $-\frac{3\pi}{4}$ 3) $\frac{11\pi}{3}$ 4) $-\frac{13\pi}{2}$

Méthode :

Tous les réels de la forme $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ont le même point image que x . On peut donc ajouter ou retrancher 2π , autant de fois que nécessaire.

SF 6.3 : Convertir des degrés en radians et des radians en degrés

Compléter le tableau suivant.

Angle en degrés	15°	120°		270°	
Angle en radians			$\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{3}$

2 - Cosinus et sinus d'un nombre réel

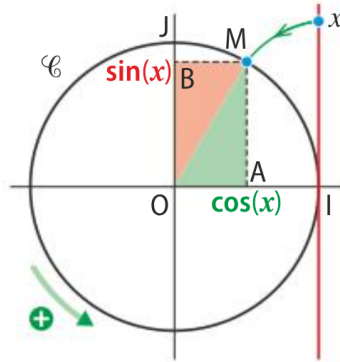
Définition : Cosinus et sinus d'un réel

Soit x un nombre réel et soit M le point du cercle trigonométrique associé à x .

Le **cosinus du réel x** , noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M . Le **sinus du réel x** , noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point M .

Ainsi, le point image de x a pour coordonnées

$$M(\cos(x); \sin(x))$$



Exemple : Si le point image de x est $I(1; 0)$, alors $\cos(x) = 1$ et $\sin(x) = 0$. Si le point image de x est $J(0; 1)$, alors $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = 1$.

Propriété : Propriétés fondamentales

Pour tout réel x , on a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Pour tout réel x et tout entier relatif k , on a

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Enfin, pour tout réel x ,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration : Relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Soit $M(\cos(x); \sin(x))$ le point image du réel x sur le cercle trigonométrique. Le rayon du cercle vaut 1, donc $OM = 1$.

Dans le triangle rectangle formé par les projections de M sur les axes, le théorème de Pythagore donne

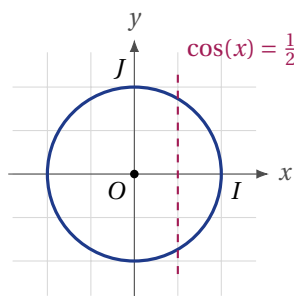
$$OM^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

Comme $OM = 1$, on obtient

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

SF 6.4 : Lire un cosinus et un sinus sur le cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, placer un point M tel que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin(x) > 0$. Donner une valeur possible de x .



Méthode :

On utilise l'abscisse pour le cosinus et l'ordonnée pour le sinus. La condition $\sin(x) > 0$ indique que le point image est au-dessus de l'axe des abscisses.

SF 6.5 : Utiliser la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Dans chaque cas, déterminer la valeur exacte manquante.

- 1) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) = \frac{3}{5}$. Déterminer $\sin(x)$.
- 2) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ et $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer $\sin(x)$.
- 3) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer $\cos(x)$.

Méthode :

La relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ permet de trouver une valeur absolue. Le signe est ensuite choisi grâce à l'intervalle dans lequel se trouve x , donc grâce à la position du point image sur le cercle.

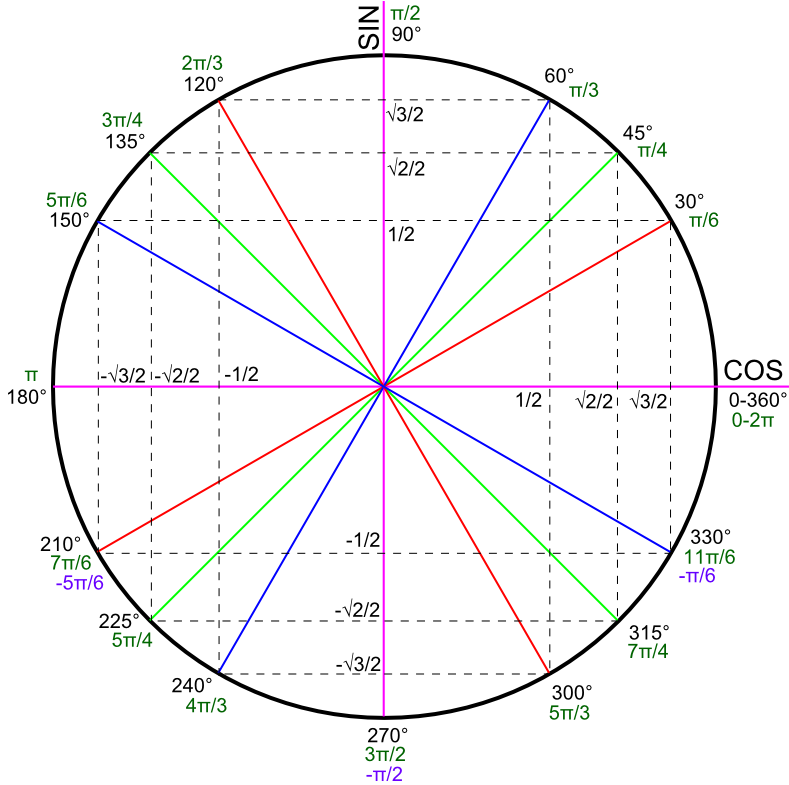
3 - Valeurs remarquables

Propriété : Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes sont à connaître.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ces valeurs se retrouvent ensuite sur tout le cercle par symétrie et par périodicité.



Démonstration : Valeurs pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$

Pour $x = \frac{\pi}{3}$, l'angle mesure 60° . Dans le cercle trigonométrique, on construit un triangle équilatéral de côté 1. La projection du point image sur l'axe des abscisses est alors le milieu du segment $[OI]$, donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

La relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, avec $\sin(x) > 0$, donne

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$, l'angle mesure 45° . Le triangle formé est rectangle isocèle, donc le cosinus et le sinus sont égaux. Ainsi

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

donc, comme ces deux nombres sont positifs,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

SF 6.6 : Déterminer des cosinus et sinus d'angles

Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants.

1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

3) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

4) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

5) $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

6) $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

Méthode :

On ramène d'abord le réel donné à un angle remarquable du premier quadrant : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{3}$. On choisit ensuite le signe grâce au quadrant dans lequel se trouve le point image.

SF 6.7 : Résoudre graphiquement une équation trigonométrique simple

À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les solutions dans $[-\pi; \pi]$ des équations suivantes.

1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$

2) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Méthode :

On place sur le cercle les points dont l'abscisse ou l'ordonnée correspond à la valeur donnée. Les solutions sont les réels de l'intervalle demandé qui ont ces points pour images.