

1^{re} spé – Chapitre n°7

Produit scalaire 1

1 - Premières définitions

Définition : Norme d'un vecteur

La **norme** d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est sa longueur.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB.$$

La norme d'un vecteur est toujours positive. Le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul $\vec{0}$.

Définition : Produit scalaire avec normes et angle

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On choisit trois points A , B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par

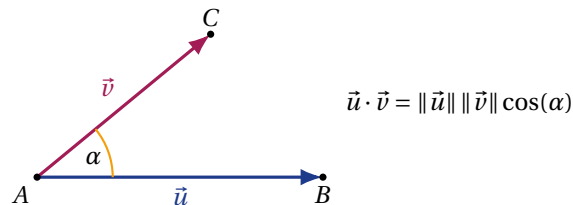
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

Autrement dit,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, alors on pose

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$



Exemple : Si $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$, alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \cos(60^\circ) = 20 \times \frac{1}{2} = 10.$$

Propriété : Carré scalaire et vecteurs colinéaires

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on appelle **carré scalaire de $\vec{u}$** le nombre $\vec{u} \cdot \vec{u}$, que l'on note aussi $\vec{u}^2$. On a

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraires, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

Démonstration : Carré scalaire

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, on applique la définition du produit scalaire à $\vec{u} \cdot \vec{u}$. L'angle formé par un vecteur non nul avec lui-même vaut 0, donc $\cos(0) = 1$. Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2.$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$, l'égalité reste vraie car les deux membres valent 0.

Propriété : Produit scalaire avec une projection orthogonale

Soient A , B et M trois points, avec $A \neq B$. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) . Alors

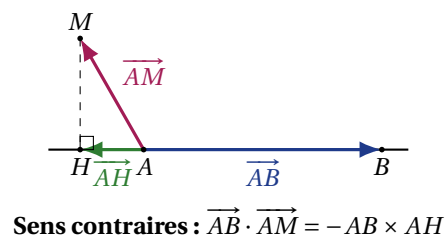
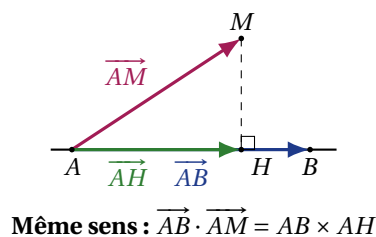
$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}.$$

Ainsi, lorsque $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de **même sens**,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = AB \times AH.$$

Lorsque $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de **sens contraires**,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -AB \times AH.$$



Démonstration : Formule avec le projeté orthogonal

On suppose d'abord que $H \neq A$. Comme H appartient à la droite (AB) , les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires. Si H est sur la demi-droite $[AB)$, alors $\widehat{BAH} = \widehat{BAM}$ et

$$AH = AM \cos(\widehat{BAM}).$$

Ainsi,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = AB \times AM \times \cos(\widehat{BAM}) = AB \times AH = \vec{AB} \cdot \vec{AH}.$$

Si H n'est pas sur la demi-droite $[AB)$, le même raisonnement donne un signe négatif, car $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de sens contraires. Si $H = A$, les deux produits scalaires valent 0.

Propriété : Symétrie et bilinéarité

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout réel k , on a les propriétés suivantes.

Propriété	Égalité
Symétrie	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
Bilinéarité à gauche	$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
Bilinéarité à droite	$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
Multiplication par un réel	$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

On démontre facilement que :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad ; \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad ; \quad (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

SF 7.1 : Calculer un produit scalaire avec des normes et un angle

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
- 3) Calculer $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

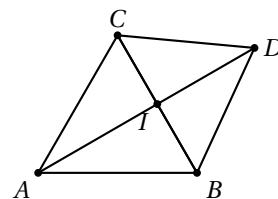
Méthode :

Avant de calculer, on choisit deux représentants des vecteurs ayant la même origine. On utilise ensuite la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$, où α est l'angle formé par ces deux représentants.

SF 7.2 : Calculer un produit scalaire avec la projection orthogonale

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 2$, et soit BCD un triangle isocèle en D tel que $BD = \sqrt{3}$. Le point D est extérieur au triangle ABC . On note I le milieu de $[BC]$.

- 1) Montrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires en I .
- 2) Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Méthode :

Pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec une projection orthogonale, on projette l'extrémité de l'un des vecteurs sur la droite dirigée par l'autre vecteur. On obtient alors un produit scalaire entre deux vecteurs colinéaires, ce qui permet de calculer avec des longueurs et un signe.

SF 7.3 : Calculer un produit scalaire avec la bilinéarité et la symétrie

On reprend la configuration du SF 7.2.

- 1) Calculer $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BI}$, puis $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BD}$.
- 2) Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID}$, puis $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
- 3) En déduire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Méthode :

Pour utiliser la bilinéarité, on décompose les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles, par exemple $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{ID}$ ou $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}$. On développe ensuite comme avec un produit algébrique, en gardant l'ordre des vecteurs seulement lorsque cela aide à lire la figure, car le produit scalaire est symétrique.

2 - Premières applications du produit scalaire

Propriété : Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Démonstration : Calculs avec les normes

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u} + (-\vec{v})\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \|-\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Exemple : Soit $ABDC$ un parallélogramme tel que $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. On veut calculer AD . On a

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

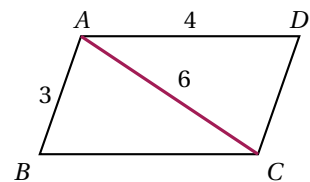
Or $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, donc

$$AD^2 = \|\vec{AD}\|^2 = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 + 1 + 2 = 5.$$

Ainsi $AD = \sqrt{5}$.

SF 7.4 : Calculer un produit scalaire à l'aide de normes

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 3$, $AD = 4$ et $AC = 6$.
Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$.



Méthode :

On utilise une égalité du type $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis on isole le produit scalaire recherché. Il faut choisir deux vecteurs dont la somme correspond à une longueur connue.

Propriété : Formule d'Al-Kashi

On considère un triangle ABC dont les côtés sont $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Pour tout triangle ABC , on a :

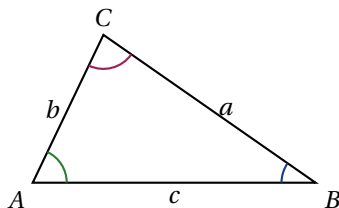
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

De même,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B})$$

et

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}).$$



Démonstration : Formule d'Al-Kashi

On a $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$. Donc :

$$\begin{aligned} BC^2 &= \vec{BC}^2 \\ &= (\vec{BA} + \vec{AC})^2 \\ &= (-\vec{AB} + \vec{AC})^2 \\ &= \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}). \end{aligned}$$

Comme $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on obtient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}).$$

On démontre de même les deux autres formules.

remarque : Si le triangle ABC est rectangle en A , alors $\cos(\hat{A}) = 0$. La formule d'Al-Kashi devient $a^2 = b^2 + c^2$, ce qui redonne le théorème de Pythagore.

SF 7.5 : Utiliser la formule d'Al-Kashi

- 1) Le triangle ABC est tel que $AB = 5$, $AC = 7$ et $\hat{A} = 120^\circ$. Calculer le côté BC .
- 2) Le triangle DEF est tel que $DE = 11$, $DF = 14$ et $EF = 12$. Calculer l'angle $\hat{D}$, arrondi au degré près.

Méthode :

La formule d'Al-Kashi permet de calculer une longueur lorsqu'on connaît deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés. Elle permet aussi de calculer un angle lorsqu'on connaît les trois côtés du triangle, en isolant le cosinus de cet angle.