

Tale spé – Chapitre n°1

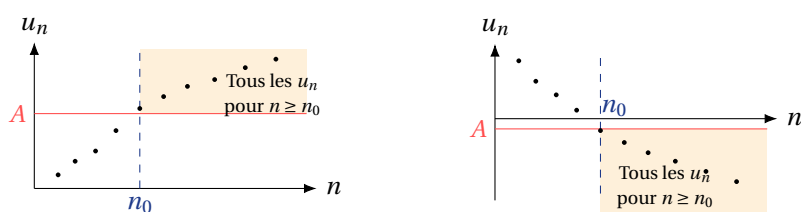
Suites et limites de suites

1 - Limite infinie ou finie d'une suite

Définition : Limites infinies

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si **tout intervalle** $]A; +\infty[$, avec A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si **tout intervalle** $]-\infty; A[$, avec A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



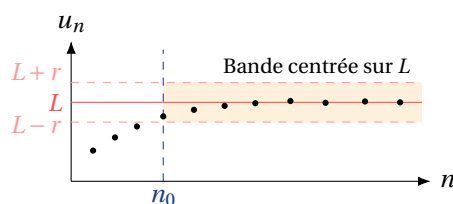
Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

Définition : Limite finie, suite convergente, suite divergente

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si **tout intervalle ouvert** contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Une telle suite est dite **convergente**.

On peut montrer que la définition suivante est équivalente : on dit que la suite (u_n) admet pour limite L si **tout intervalle ouvert** $]L - r; L + r[$, avec $r > 0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Cet intervalle est dit **centré sur L** .



Une suite est dite **divergente** si elle ne converge pas. Une suite qui diverge peut avoir $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite, ou ne pas avoir de limite, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1. C'est une suite convergente.

Propriété : Limites des suites usuelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \text{ pour } k \geq 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ pour } k \geq 1.$$

Démonstration : Pour la limite de $1/n$

Soit un intervalle ouvert $] -a; a[$, avec a réel positif non nul, contenant 0 et centré sur 0. Pour tout n tel que $n > \frac{1}{a}$, on a $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in] -a; a[$. Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $] -a; a[$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

SF 1.1 : Déterminer le sens de variation d'une suite

Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) définies ci-dessous.

- 1) Pour tout entier naturel n : $u_n = 0,2n^2 + n - 3$.
- 2) Pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{3}{n+1}$.
- 3) Pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{n}{n+1}$.
- 4) $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n - 2n - 5$.

Méthode :

On compare u_{n+1} et u_n en calculant soit $u_{n+1} - u_n$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

SF 1.2 : Déterminer une limite en utilisant la définition

- 1) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3$.
 - a) À partir de quel rang a-t-on $u_n > 1000$?
 - b) À l'aide de la définition, montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
- 2) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -3n - 6$ a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Méthode :

On considère un réel A . On cherche ensuite à déterminer la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_n \leq A$ ou $u_n \geq A$, selon la limite étudiée.

SF 1.3 : Déterminer un seuil avec un algorithme et avec la calculatrice

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout entier naturel n .

- 1) Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la variable n contienne après son exécution le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} est strictement supérieur à A .

Initialisation	$u \leftarrow \dots$ $n \leftarrow \dots$
Traitement	Tant que $\dots$ faire : $u \leftarrow \dots$ $n \leftarrow \dots$ Fin Tant que

- 2) Programmer cet algorithme sous la forme d'une fonction Python et le tester avec $A = 200$, puis $A = 5000$.

2 - Opérations sur les limites

Propriété : Limites de sommes

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 5) = +\infty$ par somme.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + n) = +\infty$ par somme.

Propriété : Limites de produits

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) =$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$ par produit.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{n} n^2) = -\infty$ par produit.

Propriété : Limites de quotients

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{n} \right) = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{n^3} = 0$ par quotient

Tous ces résultats sont intuitifs. Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de **lever l'indétermination** ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$\ll \infty - \infty \gg, \quad \ll 0 \times \infty \gg, \quad \ll \frac{\infty}{\infty} \gg, \quad \ll \frac{0}{0} \gg.$$

SF 1.4 : Déterminer la limite d'une suite par opérations

Déterminer les limites des suites définies par :

$$1) \quad u_n = n^2 + 5n + 3 \quad 2) \quad v_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \right) (-n^3 + 1) \quad 3) \quad i_n = \frac{2}{u_n}.$$

Méthode :

La rédaction doit être rigoureuse et précise.

SF 1.5 : Lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3\sqrt{n}) & \text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} \\ \text{c)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3} & \text{d)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \end{array}$$

Méthode : Deux méthodes

Factoriser les termes de plus haut degré. On rappelle que n est de degré 1, n^2 de degré 2, et $\sqrt{n}$ de degré $\frac{1}{2}$. Multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée.

3 - Limites de suites géométriques

Définition : Suite géométrique (rappels)

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que, pour tout entier n , on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

En particulier :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Propriété : Somme des termes d'une suite géométrique

Si n est un entier naturel non nul et si q est un réel différent de 1, alors : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{et} \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

De manière générale :

$$\text{somme SG} = 1^{\text{er}} \frac{1-q^{n_{\text{bre}}}}{1-q}.$$

Propriété : Limite de q^n

Soit q un réel.

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	n'existe pas	0	1	$+\infty$

SF 1.6 : Utiliser la limite d'une suite géométrique

1) Étudier la convergence des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ b) $v_n = -4\left(\sqrt{3}\right)^n$ c) $w_n = (-2)^n$.

2) Déterminer la limite de la suite définie par :

$$u_n = 3^n - 5^n.$$

4 - Théorème de comparaison et théorème des gendarmes

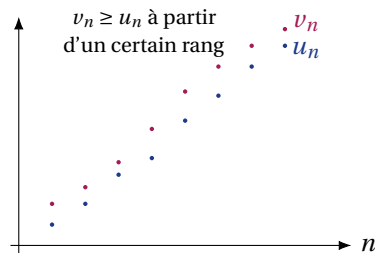
Propriété : Théorème de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $v_n \geq u_n$, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$



Démonstration : Théorème de comparaison

Soit $I =]A; +\infty[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier naturel n_1 tel que : $n \geq n_1 \implies u_n \in I$, c'est-à-dire $u_n > A$.

De plus, il existe un entier naturel n_2 tel que : $n \geq n_2 \implies v_n \geq u_n$.

Soit n_3 un entier naturel supérieur ou égal à n_1 et à n_2 . Donc :

$$n \geq n_3 \implies u_n > A \text{ et } v_n \geq u_n.$$

D'où :

$$n \geq n_3 \implies v_n > A,$$

c'est-à-dire $v_n \in I$. Donc, par définition :

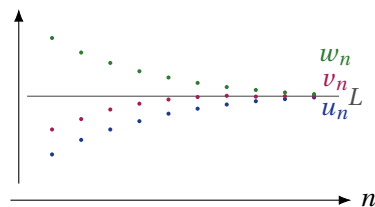
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Propriété : Théorème des gendarmes

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L , alors (v_n) converge vers L .



SF 1.7 : Utiliser le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes

Étudier la convergence des suites définies par :

- 1) $u_n = \frac{4+(-1)^n}{n^2}$ pour $n \geq 1$
- 2) $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}-\cos(n)}$ pour $n \geq 1$
- 3) $w_n = n^3 + (-1)^n$.

Méthode :

Les suites de termes généraux $\sin(n)$, $\cos(n)$ et $(-1)^n$ n'ont pas de limite. On peut les encadrer entre -1 et 1 .

SF 1.8 : Étude d'une suite arithmético-géométrique

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

- chaque année, 40 % des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés ;
- chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés.

En 2010, cette société comptait 1500 abonnés.

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1500, \\ a_{n+1} = 0,6 a_n + 400, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2010 + n$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = a_n - 1000.$$

- a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) Fournir la formule explicite du terme général v_n de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de l'entier n .
- c) En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = 1000 + 500 \times 0,6^n.$$

3. En 2010, le prix d'un abonnement annuel dans une salle de sport de cette société était de 400 euros. Chaque année, le prix de cet abonnement augmente de 5 %. On note P_n le prix en euros de l'abonnement annuel pour l'année $2010 + n$.

- a) Quelle a été la recette de cette société en 2010 ?
- b) Indiquer la nature de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant la réponse. En déduire une expression de la quantité P_n en fonction de l'entier naturel n .
- c) Montrer que, pour l'année $2010 + n$, la recette totale annuelle R_n , en euros, réalisée par la société pour l'ensemble de ses salles de sport est :

$$R_n = (500 \times 0,6^n + 1000) \times (400 \times 1,05^n).$$

- d) On souhaite déterminer l'année où, pour la première fois, la recette de cette société dépassera celle obtenue en 2010. Ci-dessous, une version incomplète d'un algorithme permettant de déterminer cette année. Recopier et compléter cet algorithme.