

Tale spé – Chapitre n°2

Dénombrement

1 - Principes additif et multiplicatif

Définition : Ensemble, cardinal, ensembles disjoints

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.

Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal 0.

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est-à-dire en déterminer le cardinal. On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple : Soit E l'ensemble des élèves de la classe. $\text{Card}(E)$ est le nombre d'élèves dans la classe.

Propriété : Principe additif

Soient E_1 et E_2 deux **ensembles finis disjoints**. Le nombre d'éléments de la réunion $E_1 \cup E_2$ est :

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$$

Cette propriété est généralisable à n ensembles finis deux à deux disjoints.

Définition : Produit cartésien

Soient k ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_k$.

Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des couples (a_1, a_2) , où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.

Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des triplets (a_1, a_2, a_3) , où $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.

Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des k -uplets $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, où $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, \dots, a_k \in E_k$.

On peut effectuer un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même.

On note alors $E \times E = E^2$ l'ensemble des couples de E , **donc avec répétition possible**.

On note E^k l'ensemble des **k -uplets** de E , donc avec **répétition possible**.

Propriété : Principe multiplicatif

Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis. Le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2$ est :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2)$$

Cette propriété est généralisable à n ensembles finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_n).$$

Le nombre de k -uplets de E est :

$$\text{Card}(E^k) = [\text{Card}(E)]^k$$

Exemple : Un code de carte bancaire est un 4-uplet de $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$. Le nombre de codes possibles est $\text{Card}(E^4) = [\text{Card}(E)]^4 = 10^4$.

Définition : Partie d'un ensemble

Une partie d'un ensemble E est un ensemble d'éléments de E . L'ensemble des parties de E contient toujours $\emptyset$ et E .

Exemple : Soit $E = \{a, b, c\}$. Les parties de E sont $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$. L'ensemble E comporte 8 parties.

Propriété : Nombre de parties d'un ensemble

Le nombre de parties d'un ensemble fini E est :

$$2^{\text{Card}(E)}$$

Démonstration : Nombre de parties d'un ensemble

Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On a $\text{Card}(E) = n$.

On associe à chaque partie P de E un unique n -uplet de l'ensemble $\{0; 1\}$ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n , on note 1 si e_i est dans P , et 0 sinon.

Par exemple, la partie $\emptyset$ correspond au n -uplet $(0; 0; 0; \dots; 0)$. La partie $\{e_1, e_3\}$ correspond au n -uplet $(1; 0; 1; 0; \dots; 0)$.

Ainsi, le nombre de parties de E est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$, c'est-à-dire 2^n .

SF 2.1 : Utiliser les principes additif et multiplicatif

Soient deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$.

- 1) Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$, puis de $E \times F$.
- 2) Un restaurant propose un menu « Plat + Dessert ». Un client qui décide de prendre ce menu doit choisir un plat parmi les trois viandes et les deux poissons proposés, puis un dessert parmi les quatre desserts proposés. Déterminer le nombre de choix différents permettant de construire son menu.

SF 2.2 : Dénombrer les k-uplets d'un ensemble fini

Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués du couple $(0, 6)$, que l'on complète par un 8-uplet de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

- 1) Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06.
- 2) Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles?

Pour sécuriser son compte sur un site internet, Emma doit créer un mot de passe composé de 7 lettres, uniquement avec les 26 lettres de l'alphabet, sans caractère spécial et sans chiffre. Sa copine Fanny lui demande : « Combien de mots de passe différents peux-tu créer? »

- 3) Quelle sera la réponse d'Emma?

SF 2.3 : Dénombrer le nombre de parties d'un ensemble

On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

- 1) Déterminer toutes les parties de l'ensemble E .
- 2) Combien y en a-t-il? Quelle formule peut-on vérifier?
- 3) Déterminer le nombre de parties à deux éléments de l'ensemble E . Nous verrons plus tard que cela correspond au nombre binomial $\binom{4}{2}$.

2 - Arrangements et permutations

Définition : Factorielle d'un nombre entier naturel

On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n . On note :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

$n!$ se lit « factorielle n » et, par convention, $0! = 1$.

Exemple : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, $100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100$, et $1! = 1$.

Définition : k-uplet d'éléments distincts

On appelle **k-uplet d'éléments distincts de E** un k -uplet de E pour lequel tous les éléments sont différents.

Ils sont aussi appelés des **arrangements** de k éléments de E .

Dans un arrangement, **l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas**.

Exemple : Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Alors, (a, b, d) , (c, d, b) et (d, c, b) sont des 3-uplets d'éléments distincts de E . En revanche, (a, c, c) n'en est pas un, car l'élément c est répété.

Propriété : Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de k -uplets d'éléments distincts de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Définition : Permutation

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est un n -uplet d'éléments distincts de E .

Exemple : Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Alors, (a, b, d, c) et (d, c, b, a) sont des permutations de E .

Propriété : Nombre de permutations

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est :

$$n!$$

Exemple : Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Il y a $4! = 24$ permutations possibles de l'ensemble E .

SF 2.4 : Dénombrer les k-uplets d'éléments distincts

1) Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Combien y a-t-il de 3-uplets d'éléments distincts de E ?

2) Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matches aller-retour, appelés phase régulière, passent à la deuxième phase du championnat.

a) Combien de classements composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles?

b) Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière. Combien de classements composés des six premières équipes de cette phase régulière étaient alors possibles avec le Stade Toulousain en tête?

SF 2.5 : Dénombrer et utiliser les permutations

- 1) Soit $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Combien de permutations de E peut-on réaliser?
- 2) On reprend l'énoncé de la question 2) du savoir-faire précédent.
 - a) Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP 14 sont possibles?
 - b) Lors de la saison 2018-2019, le Stade Toulousain a fini premier de la phase régulière, suivi de Clermont-Ferrand. Combien de classements de ce championnat sont alors possibles avec ces deux équipes positionnées respectivement première et deuxième?

3 - Combinaisons

Définition : Combinaison

Soit n un entier naturel non nul et soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. L'ensemble E comporte n éléments, c'est-à-dire $\text{Card}(E) = n$.

Une combinaison de k éléments de E est une partie de E à k éléments.

Exemple : Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{a, c, d\}$ et $\{b, c, d\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E .

Propriété : Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé **coefficient binomial**. Par convention :

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Cas particuliers :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Exemple : Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. On ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints. Il y a donc : $\binom{34}{4} = 46\,376$ combinaisons possibles. Ici, il n'y a pas de classement des 4 délégués.

Propriété : Symétrie des coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Propriété : Somme des coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration : Somme des coefficients binomiaux

Par définition, pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments de E . Autrement dit, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E composées de k éléments. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

est égal au nombre total de parties de E , c'est-à-dire les parties de 0 à n éléments.

Or il y a 2^n parties de E . Donc :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

SF 2.6 : Calculer des combinaisons

Calculer $\binom{7}{3}$, puis $\binom{7}{4}$.

Calculer $\binom{5}{k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 5$.

Calculer $\binom{20}{12}$ avec une calculatrice.

SF 2.7 : Utiliser des combinaisons pour dénombrer

1) On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main » de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.

a) Combien de « mains » de 4 cartes peut-on alors former?

b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as?

2) Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de jorki, ou football à 5.

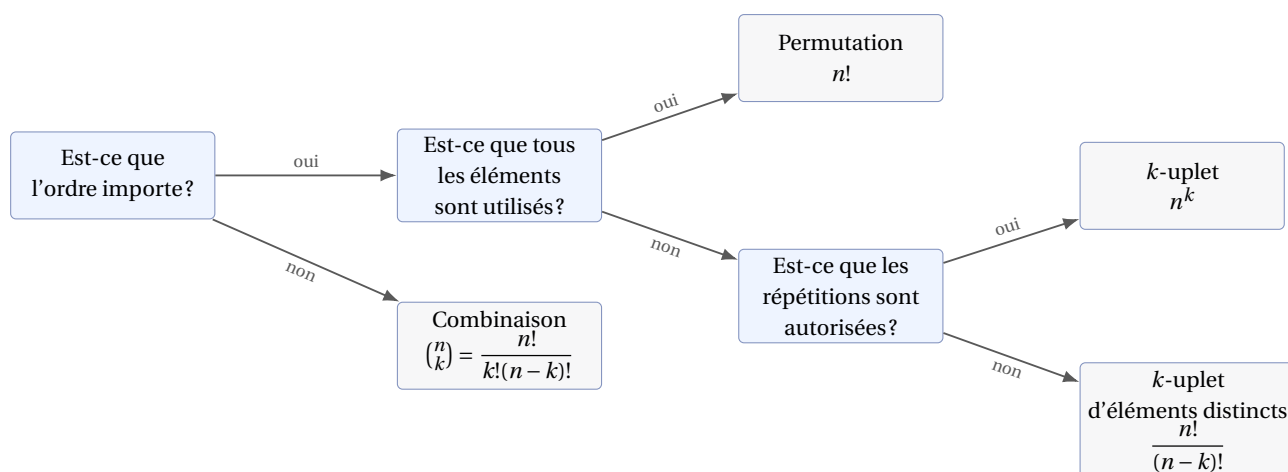
a) Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former?

b) Si les équipes sont composées au hasard, quelle est la probabilité qu'Hugo et Kylian soient ensemble? En donner l'arrondi à 0,01.

Méthode : Identifier une combinaison

On utilise une combinaison lorsque l'on choisit des éléments sans tenir compte de leur ordre.

En résumé :



4 - Triangle de Pascal

Propriété : Relation de Pascal

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration : Relation de Pascal

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \right) \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Définition : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer de manière algorithmique les coefficients $\binom{n}{k}$.
Pour cela, on utilise le tableau ci-dessous : n varie en ligne à partir de 0 et k en colonne à partir de 0.
On sait que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, donc la première colonne et la diagonale ne contiennent que des 1.
On trouve les coefficients suivants en utilisant la relation de Pascal.

	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	1 + 2	3	1				
$n = 4$	1	4	3 + 3	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1

SF 2.8 : Utiliser le triangle de Pascal

Calculer, à l'aide du triangle de Pascal, les combinaisons suivantes :

$$\binom{6}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \binom{7}{3}.$$

SF 2.9 : Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques

1) Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble $E = \{A, B, O\}$. Ces éléments sont appelés allèles.

a) Combien de couples d'allèles sont possibles ?

b) On appelle hétérozygote un gène qui est représenté par deux allèles différents. L'ordre ne compte pas : par exemple, le couple d'allèles (A, B) donne le même code que le couple d'allèles (B, A) . Déterminer le nombre d'hétérozygotes pour le groupe sanguin.

c) On appelle homozygote un gène qui contient les mêmes allèles. On appelle génotype l'ensemble des compositions alléliques d'un individu. Déterminer alors le nombre de génotypes sanguins.

2) Pour accéder à un compte sur un site internet, un utilisateur doit saisir un mot de passe contenant deux lettres et trois chiffres. Dans chacun des cas, déterminer le nombre de mots de passe.

a) Le mot de passe commence par les deux lettres.

b) Le mot de passe commence par les deux lettres et les caractères sont tous différents.

SF 2.10 : Utiliser une représentation adaptée dans le cadre d'un dénombrement

A) Dans un escape game, c'est-à-dire un jeu en immersion dans lequel les participants résolvent des énigmes pour sortir d'une pièce, il faut trouver un code à 4 chiffres contenant une fois le nombre 3, deux fois le nombre 5 et une fois le nombre 6.

Déterminer le nombre de codes différents possibles, puis la probabilité de trouver le bon code dès le premier essai. Arrondir à 0,01.

B) 1) Dans un lycée de 500 élèves, 300 d'entre eux ont un compte Snapchat et 380 ont un compte Facebook. Il y a 50 élèves qui n'ont de compte dans aucun des deux réseaux sociaux.

Combien d'élèves ont un compte sur les deux réseaux sociaux ?

Combien ont seulement un compte sur Snapchat ?

2) Dans un autre lycée de 495 élèves, 395 élèves ont un compte Snapchat, 163 ont un compte Instagram et 19 élèves ont un compte Facebook. Parmi tous ces élèves, 5 ont seulement un compte Facebook, 8 ont un compte sur Facebook et Snapchat mais pas sur Instagram, 82 ont seulement un compte Instagram et 2 ont un compte sur les trois réseaux sociaux.

a) Déterminer le nombre d'élèves qui n'ont de compte que sur Snapchat.

b) Déterminer le nombre d'élèves qui n'ont aucun compte social.

SF 2.11 : Effectuer une simulation en Python

- 1) En utilisant le triangle de Pascal, déterminer la liste des coefficients $\binom{5}{k}$, où k parcourt les entiers entre 0 et 5.
- 2) On considère le programme Python ci-dessous. On veut vérifier, pour quelques valeurs de n , que cette fonction retourne la liste des coefficients $\binom{n}{k}$, pour un entier n fixé.

```
1 def Pascal(n):
2     L = [1]
3     for i in range(1, n+1):
4         L.append(1)
5         a = L[0]
6         b = L[1]
7         for k in range(1, i):
8             L[k] = a + b
9             a = b
10            b = L[k+1]
11     return(L)
```

- a) Faire tourner ce programme pour $n = 1$ et $n = 2$.
- b) On suppose qu'après la boucle `for` décrite pour $i = 3$, la variable `L` contient la liste `[1,3,3,1]`. Détailler le fonctionnement du programme pour donner le contenu de la variable `L` après la boucle d'indice $i = 4$.
- c) À l'aide de ce programme, déterminer la valeur $\binom{10}{4}$.