

Tale spé – Chapitre n°3

Compléments sur les fonctions

1 - Complément sur la dérivation

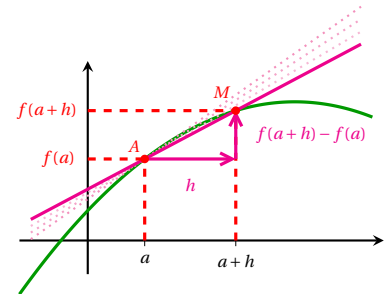
Rappels de première :

Le nombre dérivé en a , noté $f'(a)$, correspond au **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Equation de la tangente :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Propriété : Dérivée de u^n

n est un entier relatif non nul. La fonction u est une fonction dérivable sur un intervalle I , ne s'annulant pas sur I dans le cas où n est négatif. Alors la fonction f définie sur I par

$$f(x) = (u(x))^n$$

est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}.$$

Par abus de notation :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

Exemple : Pour $f(x) = (2x+6)^5$, on obtient

$$f'(x) = 5 \times 2 \times (2x+6)^4 = 10(2x+6)^4.$$

Propriété : Dérivée de $\sqrt{u}$

u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \sqrt{u(x)}$$

est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Par abus de notation :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple : Pour $f(x) = \sqrt{x^2+3}$, on obtient

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Propriété : Dérivée de e^u

u est une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par

$$f(x) = e^{u(x)}$$

est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}.$$

Par abus de notation :

$$(e^u)' = u' e^u$$

Exemple : Pour $f(x) = e^{x^3+1}$, on obtient

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3+1}.$$

Définition : Fonction composée

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles. Une autre opération sur les fonctions existe : la **composition**.

Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition respectifs sont notés $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. La fonction composée de f par g , notée $g \circ f$, est la fonction définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

L'ensemble de définition de $g \circ f$ est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathcal{D}_f$ dont l'image par f appartient à $\mathcal{D}_g$.

Exemple : Soit $f(x) = 2x + 6$ définie sur $\mathbb{R}$, et $g(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$.

$g(f(x))$ existe si et seulement si $f(x)$ existe et est positif. Or

$$2x + 6 \geq 0 \iff x \geq -3.$$

Donc la fonction $g \circ f$ est définie sur $[-3; +\infty[$ par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 6) = \sqrt{2x + 6}.$$

La fonction $f \circ g$ est définie sur $[0; +\infty[$ par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 6.$$

Propriété : Dérivée de la composée

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J , et f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout réel x appartenant à I , $f(x)$ appartient à J .

La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Variation des fonctions composées :

g	h	$f = g \circ h$
↗	↗	↗
↘	↗	↘
↗	↘	↘
↘	↘	↗

SF 3.1 : Composer des fonctions

Soient u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$, v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 3x - 1$, et w la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $w(x) = \sqrt{x}$.

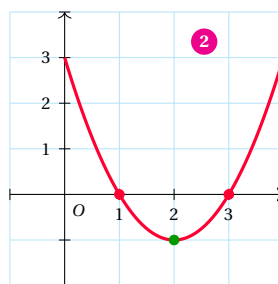
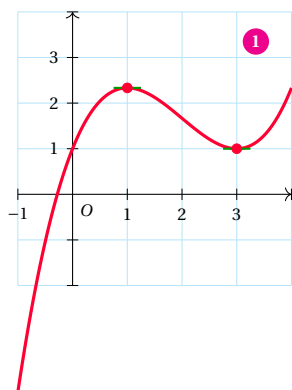
- 1) Préciser l'ensemble de définition de $u \circ v$, puis déterminer explicitement $(u \circ v)(x)$.
- 2) Préciser l'ensemble de définition de $v \circ u$, puis déterminer explicitement $(v \circ u)(x)$.
- 3) Préciser l'ensemble de définition de $v \circ w$, puis déterminer explicitement $(v \circ w)(x)$.
- 4) Préciser l'ensemble de définition de $w \circ v$, puis déterminer explicitement $(w \circ v)(x)$.

SF 3.2 : Calculer la dérivée d'une fonction

1) Calculer la dérivée des fonctions f , g , h et k , dérivables sur $\mathbb{R}$, dont on donne l'expression :

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$ b) $g(x) = (2x - 1)^4$ c) $h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ d) $k(x) = e^{3x^2 + 1}$

2) Ces courbes représentent une fonction f définie sur $[-1; 4]$ et sa fonction dérivée f' .



Laquelle représente f et laquelle représente f' ?

SF 3.3 : Calculer la fonction dérivée, conjecturer les limites et étudier les variations d'une fonction

On considère la fonction f définie par

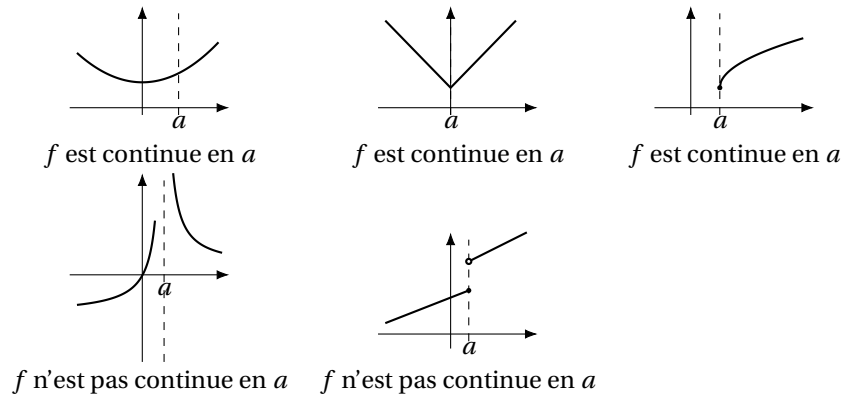
$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Étudier les variations de f .
- 3) Conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2 - Fonctions continues

Exemples et contre-exemples pour la continuité en a :



La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Fonction continue

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a .

La fonction f est **continue en a** si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

La fonction f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I .

Remarque : les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemples :

Les fonctions $|x|$, x^n , avec $n \in \mathbb{N}$, et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

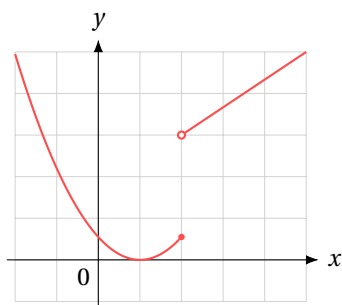
La fonction $\frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

Propriété : Opérations fonctions continues

- 1) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la somme $f + g$, le produit $\lambda \times f$, le produit $f \times g$ et f^n , où n est un entier naturel non nul, sont continus sur I . Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- 2) Soit v une fonction continue sur un intervalle J , et u une fonction continue sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I , $u(x)$ appartient à J . La fonction composée $v \circ u$ est continue sur I .
- 3) Une fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur cet intervalle.

SF 3.4 : Étudier la continuité d'une fonction

On considère une fonction définie sur $[-2; 4]$, dont on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



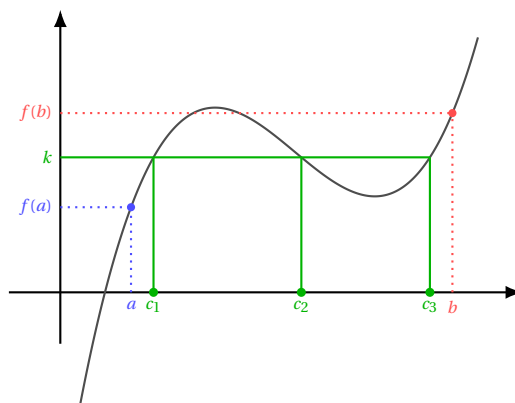
- 1) La fonction f est-elle continue en 2 ?
- 2) La fonction f est-elle continue en -1 ?

3 - Continuité et Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété : Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Conséquence :

Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** dans l'intervalle $[a; b]$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$. Alors, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans l'intervalle $[a; b]$.

Extension : on peut également appliquer le corollaire dans le cas d'un intervalle du type $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; +\infty[$, voir le chapitre sur les limites de fonctions.

SF 3.5 : Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3.$$

Prouver que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[4; 9]$.

SF 3.6 : Donner une valeur approchée de la solution d'une équation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1.$$

- 1) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement trois solutions sur $[-4; 4]$.
- 3) Donner une valeur approchée à 10^{-3} de ces solutions.

Méthode : Encadrer une solution

Après avoir justifié l'existence et l'unicité d'une solution sur un intervalle, on peut utiliser la calculatrice ou un tableau de valeurs pour donner un encadrement de plus en plus précis.