

Tale spé – Chapitre n°4

Limites de fonctions

1 - Limites d'une fonction et asymptotes

Pour les limites infinies en l'infini, on retrouve les définitions équivalentes à celles des limites de suites, en ajoutant les définitions en $-\infty$. On retrouve aussi simplement les limites des fonctions usuelles en $+\infty$ et $-\infty$.

Définition : Limite finie en l'infini

On dit que la fonction f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

On définit de façon analogue une limite réelle en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Définition : Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si

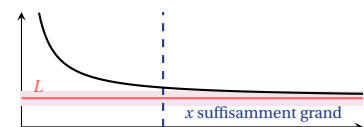
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

Remarque : la courbe de la fonction se rapproche de son asymptote.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition : Limite en un réel x_0 , asymptotes verticales

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle $]a; +\infty[$, avec a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de x_0 . On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en x_0 si tout intervalle $]-\infty; b[$, avec b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de x_0 . On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si

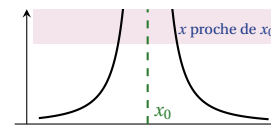
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Définition : Limites à gauche et à droite

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel x_0 selon que $x > x_0$ ou $x < x_0$.
On parle de limite à gauche de x_0 et de limite à droite de x_0 .

Exemple :

La fonction représentée ci-contre a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 .
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de x_0 . Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de x_0 .



SF 4.1 : Conjecturer et interpréter des limites en l'infini

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3x+1}{x}.$$

- a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b) Démontrer cette conjecture.

Méthode : Interpréter une limite finie en l'infini

Pour conjecturer une limite en $+\infty$, on observe les valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de x de plus en plus grandes.

SF 4.2 : Conjecturer et interpréter des limites en un réel

Exercice 1 :

La fonction f est définie sur $] -1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

- a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la limite de la fonction f en -1 .
- b) Démontrer cette conjecture.
- c) Interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 2 :

La fonction g est définie sur $] -\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{2}{3-x}.$$

- a) Calculer la limite de g à droite en 3.
- b) Calculer la limite de g à gauche en 3.

2 - Opérations sur les limites

Voir le chapitre 1 : opérations limites de suites

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty", \quad "\frac{\infty}{\infty}" \quad \text{et} \quad "\frac{0}{0}."$$

Propriété : Limite d'une fonction composée

a , b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Les fonctions f et g sont des fonctions.

$$\text{si} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Exemple : Soit la fonction $f(x) = e^{-2x}$. Calculons sa limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty, \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

SF 4.3 : Déterminer la limite d'une somme ou d'un produit

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2)$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2 - x)$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 3) \left(2 - \frac{1}{x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$

SF 4.4 : Déterminer les limites d'une fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 5x + 2.$$

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Méthode : Fonction polynôme

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

SF 4.5 : Déterminer la limite d'un quotient

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]4; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{-x + 4} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3x}{-x + 4}.$$

Calculer les limites des fonctions f et g en 4 et en $+\infty$.

SF 4.6 : Déterminer la limite d'une fonction composée

Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{2-3x} \quad \text{et} \quad h(x) = (2-3x)^4.$$

- 1) Écrire la fonction g comme composée de deux fonctions puis déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Calculer les limites de la fonction h en $-\infty$ et en $+\infty$.

3 - Comparaisons et croissances comparées

Pour calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, on peut utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement, aussi appelés théorèmes des gendarmes. **Voir le chapitre n°1.**

SF 4.7 : Utiliser le théorème de comparaison et d'encadrement

A) Calculer :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin(x)) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 1}.$$

B) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \sin x$.

Calculer la limite de f en $+\infty$.

C) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \cos x$.

a) Démontrer que, pour tout nombre réel x ,

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Propriété : Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

et, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

et, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration : Croissances comparées

a) On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. On a

$$f'(x) = e^x - x \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x - 1.$$

Pour tout x strictement positif,

$$f''(x) = e^x - 1 \geq 0.$$

On dresse alors le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$	1	
Signe de $f'(x)$		+
$f(x)$	1	

On en déduit que, pour tout x strictement positif, $f(x) > 0$, et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.

On a ainsi

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty,$$

on en déduit par comparaison de limites que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Dans le cas général, il faut montrer que

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n$$

et appliquer le résultat précédent.

b) On pose $X = -x$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $X \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-X e^{-X}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{X}{e^X} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X}} \right) = 0.$$

Dans le cas général, il faut montrer que

$$-\frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \leq x^n e^x \leq \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}}$$

et appliquer le résultat précédent et le théorème d'encadrement.

Propriété : Autre limite remarquable

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration : Autre limite remarquable

Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

SF 4.8 : Utiliser les croissances comparées de x^n et e^x

A) Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-3x}) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1 - \frac{1}{x}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}.$$

B) La fonction f est définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

C)

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{4x}$. Étudier la limite de g en $-\infty$.