

Tale spé – Chapitre n°5

Récurrence, convergence monotone

1 - Raisonnement par récurrence

Définition : Propriété et hérédité

Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie soit fausse. Quand la propriété concerne un entier naturel n , on peut la noter P_n .

Une propriété est dite **héréditaire** à partir du rang n_0 si, lorsque pour un entier $n \geq n_0$ la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $n + 1$.

Exemple : Une égalité : $P_n : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. **Une inégalité :** $P_n : (1 + \pi)^n \geq 1 + n\pi$. **Une phrase :** $P_n : n^3 - n$ est un multiple de 3.

Propriété : Principe de récurrence

P_n désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

Étape 1 : initialisation. La propriété P_{n_0} est vraie.

Étape 2 : hérédité. Pour tout entier $n \geq n_0$, P_n vraie implique P_{n+1} vraie.

Alors on peut **conclure (Étape 3)** que P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans un raisonnement par récurrence, pour démontrer l'hérédité, on considère un entier n , avec $n \geq n_0$, et on suppose que la propriété est vraie au rang n . C'est **l'hypothèse de récurrence**. On démontre alors que la propriété est vraie au rang $n + 1$, en utilisant cette hypothèse de récurrence.

SF 5.1 : Vérifier qu'une propriété est vraie à un rang donné

Soit n un entier naturel. Vérifier que chaque propriété P_n suivante est vraie pour le rang n_0 donné.

1) $P_n : 5^n - 2^n$ est un multiple de 3, avec $n_0 = 1$.

2) $P_n : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \leq n^3$, avec $n_0 = 2$.

3) $P_n : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$, avec $n_0 = 3$.

Méthode : Attention

La rédaction est essentielle ici. Cela sera le cas pour l'initialisation du raisonnement par récurrence.

SF 5.2 : Mettre en œuvre un raisonnement par récurrence

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,3u_n + 7$ et $u_0 = 2$. Démontrer par récurrence que $u_n \leq 10$ pour tout entier naturel n .

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$ et $v_0 = 1$. Démontrer par récurrence que $v_n = (n + 1)^2$ pour tout entier naturel n .

Méthode :

1) Initialisation 2) Hérédité 3) Conclusion

2 - Suites majorées, minorées. Convergence monotone

Définition : Suite monotone

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

croissante si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$;

décroissante si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Une suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

On peut démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante par récurrence.

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Le réel M est appelé **majorant** de (u_n) .

La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. Le réel m est appelé **minorant** de (u_n) .

La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple : Les suites de terme général $\cos(n)$ ou $(-1)^n$ sont bornées. La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Propriété : Une suite croissante convergente est majorée

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell,$$

alors la suite (u_n) est majorée par ℓ .

Démonstration : Une suite croissante convergente est majorée

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire. On suppose donc qu'il existe un entier p tel que $u_p > \ell$.

L'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_p[$ contient ℓ . Or, par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Donc l'intervalle $]\ell - 1; u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Comme (u_n) est croissante, on a $u_n > u_p$ pour $n > p$. Donc, si $n > p$, alors $u_n \notin]\ell - 1; u_p[$.

Les deux affirmations sont contradictoires. On en déduit qu'il n'existe pas d'entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > \ell$. Ainsi, la suite est majorée par ℓ .

Propriété : Suite croissante non majorée

Si une suite croissante est non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Si une suite décroissante est non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration : Suite croissante non majorée

Soit A un réel. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > A$.

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n > p$, on a $u_n > u_p$. Ainsi, pour tout entier $n > p$, on a $u_n > A$.

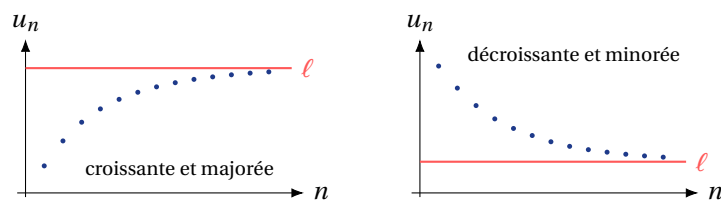
Donc, à partir d'un certain rang p , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A; +\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Propriété : Théorème de convergence monotone

Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.

Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.



- Admis -

Propriété : Théorème du point fixe

Soit (u_n) une suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est une fonction continue. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors ce nombre vérifie

$$\ell = f(\ell)$$

Démonstration : Théorème du point fixe

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

De plus, on sait que f est continue, donc, d'après la relation vue en haut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(\ell).$$

Il est clair que, même suite excepté pour le premier terme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

On a donc :

$$\ell = f(\ell).$$

SF 5.3 : Déterminer le sens de variation d'une suite

1) Montrer, avec la méthode n°2, que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3n$ est croissante.

2) Montrer, avec la méthode n°1, que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n n^2$$

est décroissante.

3) Montrer par récurrence que la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n - 3$ est décroissante.

Méthode : Trois méthodes

Méthode n°1 – méthode algébrique : on compare directement u_n et u_{n+1} , soit en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, soit en comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Méthode n°2 – étude de la fonction $f(n)$: si la suite est définie explicitement, c'est-à-dire si $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{N}$.

Méthode n°3 – par récurrence : on démontre que la propriété $P_n : u_{n+1} \geq u_n$ ou la propriété $P_n : u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour tout entier n .

SF 5.4 : Montrer qu'une suite est majorée ou minorée

1) Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 6n + 5$ est minorée par -4 .

2) Montrer par récurrence que la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n - 3$ est majorée par 3.

Méthode :

Méthode n°1 : on étudie le signe de $u_n - M$ ou de $u_n - m$.

Méthode n°2 : on raisonne par récurrence.

SF 5.5 : Étudier la convergence d'une suite monotone

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

1) Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 7.

2) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

Méthode :

Réinvestir les deux savoir-faire précédents et utiliser le théorème de convergence monotone.

SF 5.6 : Étudier une suite définie par récurrence

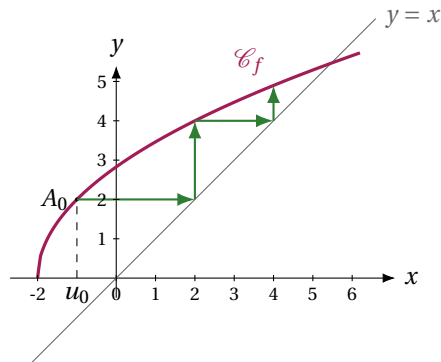
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par

$$f(x) = 2\sqrt{x+2}.$$

On donne ci-dessous une représentation de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f , ainsi que la droite d'équation $y = x$.



- 1) Sur l'axe des abscisses, on a placé u_0 . Reproduire ce schéma et construire u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
- 2) Étudier les variations de f sur $[-2; +\infty[$.
- 3) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.
- 4) Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ , puis déterminer ℓ .

3 - Suites géométriques

Définition : Suite géométrique (rappels)

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que, pour tout entier n , on a

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors, pour tous entiers naturels n et p , on a

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

En particulier :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Propriété : Somme des termes d'une suite géométrique

Si n est un entier naturel non nul et si q est un réel différent de 1, alors

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

et

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Propriété : Limite de q^n

Soit q un réel.

Valeur de q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	n'existe pas	0	1	$+\infty$

Démonstration : Limite de q^n

Prérequis : pour tout entier naturel n , on a

$$(1 + a)^n \geq 1 + na,$$

ce qui correspond à l'inégalité de Bernoulli, démontrée par récurrence.

Si $q > 1$, on pose $q = 1 + a$ avec $a > 0$. Alors

$$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$. Donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

Si $0 < q < 1$, on pose $q' = \frac{1}{q}$, donc $q = \frac{1}{q'}$. On a alors $q' > 1$. D'après le résultat précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q')^n = +\infty$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

Si $-1 < q < 0$, on pose $q' = -q$, donc $q = -q'$. On a alors $0 < q' < 1$. D'après le résultat précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q')^n = 0$. Or, pour tout entier naturel n ,

$$q^n = (-q')^n.$$

On a donc

$$-(q')^n \leq q^n \leq (q')^n.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

Si $q = 1$, la suite (q_n) , de terme général q^n , est constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.

SF 5.7 : Utiliser la limite d'une suite géométrique

1) Étudier la convergence des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$

b) $v_n = -4(\sqrt{3})^n$

c) $w_n = (-2)^n$

2) Déterminer la limite de la suite définie par

$$u_n = 3^n - 5^n.$$

SF 5.8 : Étudier un phénomène d'évolution modélisable par une suite

Au casino, une machine à sous est réglée de la façon suivante.

Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $\frac{1}{4}$.

Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel non nul, on note G_n l'événement « la n -ième partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$, donc

$$p_1 = \frac{1}{4}.$$

1) Montrer que

$$p_2 = \frac{7}{16}$$

et que, pour tout entier naturel n non nul,

$$p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

2) Programmer une fonction Python retournant la liste des dix premiers termes de la suite (p_n) . Quelle conjecture peut-on émettre ?

3) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par

$$u_n = p_n - \frac{2}{5}.$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul,

$$p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c) La suite (p_n) est-elle convergente ? Interpréter ce résultat.