

Tale spé – Chapitre n°6

Vecteurs, droites et plans de l'espace

1 - Vecteurs de l'espace

Définition : Vecteur de l'espace

Un vecteur de l'espace est défini par une **direction** de l'espace, un **sens** et une **norme** ou longueur.

Remarque : les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane. La relation de Chasles, les propriétés en rapport avec la colinéarité et les constructions de translations restent valides.

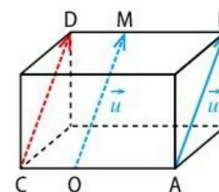
Propriété : Propriété du parallélogramme

A, B, C et D sont quatre points de l'espace.

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, ABDC est un **parallélogramme**.

D est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{AB}$ si et seulement si $\vec{CD} = \vec{AB}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.



Définition : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont même direction.

Autrement dit, les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que

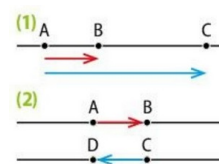
$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Propriété : Alignement, parallélisme

A, B, C et D sont quatre points de l'espace.

Les points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si, et seulement si, $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



Définition : Combinaisons linéaires de vecteurs

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On dit que le vecteur $\vec{u}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si, et seulement si, $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w},$$

où a et b sont des réels.

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **linéairement indépendants** s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres.

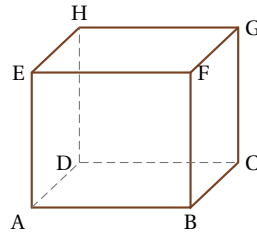
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si, et seulement si, l'égalité

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \text{implique} \quad a = b = c = 0$$

SF 6.1 : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous. Construire les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GF}.$$

**SF 6.2 : Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs**

On considère un tétraèdre ABCD.

- 1) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
- 2) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

2 - Droites et plans de l'espace

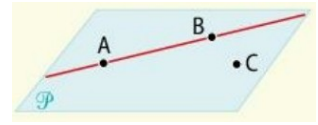
Propriété : Règles d'incidence

Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite.

Par trois points non alignés A, B et C, il passe un unique plan noté (ABC) .

Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est **incluse** dans ce plan $\mathcal{P}$.

Dans chaque plan de l'espace, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent.



Définition : Vecteur directeur d'une droite

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul dont la direction est la même que celle de d .

Propriété : Caractérisation vectorielle d'une droite

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

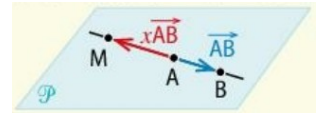
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Autrement dit, la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB},$$

où k est un réel quelconque.

Un point A et un vecteur $\vec{u}$ déterminent la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.



Propriété : Caractérisation vectorielle d'un plan

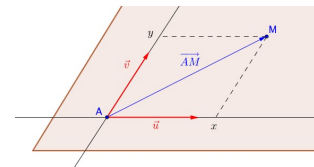
Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v},$$

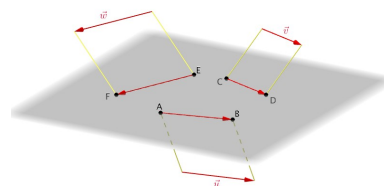
avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère du plan.



Définition : Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété : Propriété des vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, ces trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, c'est-à-dire si l'on peut exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres. Par exemple :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont **pas coplanaires** si, et seulement si, ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, c'est-à-dire s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres.

SF 6.3 : Montrer que des vecteurs sont colinéaires, que des points sont alignés

Soient M, N et P trois points de l'espace non alignés. On considère les points I et J tels que

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}.$$

- 1) Faire une figure.
- 2) Montrer que le point P appartient à la droite (IJ).

SF 6.4 : Montrer que trois vecteurs sont coplanaires

- 1) On considère un tétraèdre ABCD. Soit M le point tel que

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}.$$

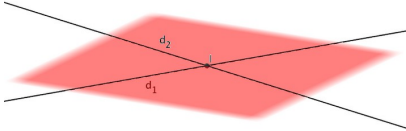
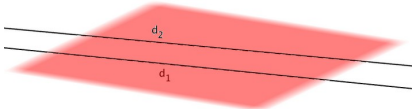
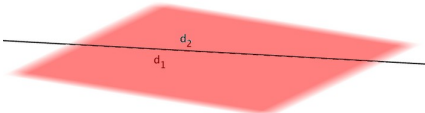
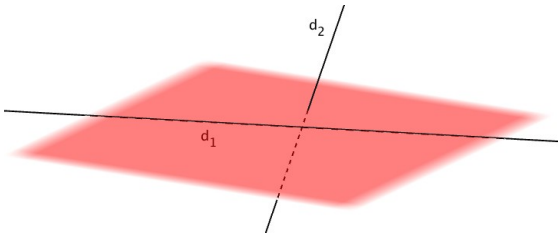
Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

- 2) On considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I et J les milieux respectifs des côtés [GH] et [FG]. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

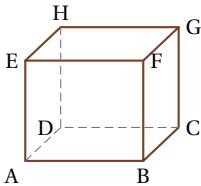
3 - Position relative de droites et de plans

Propriété : Position relative de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires**, c'est-à-dire dans un même plan, soit **non coplanaires**.

d_1 et d_2 sont coplanaires	
d_1 et d_2 sont sécantes	
d_1 et d_2 sont parallèles	
	
d_1 et d_2 sont non coplanaires	
	

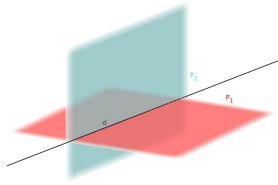
Exemple : ABCDEFGH est un cube. Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G. Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles. Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



Propriété : Position relative de deux plans

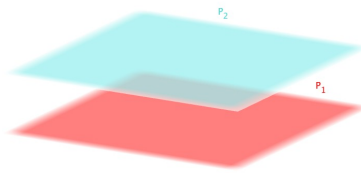
Deux plans de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

P_1 et P_2 sont sécants



P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d .

P_1 et P_2 sont parallèles



P_1 et P_2 sont strictement parallèles.



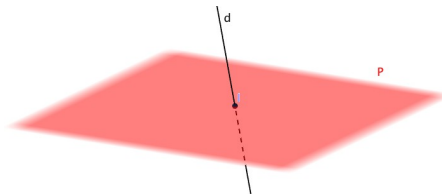
P_1 et P_2 sont confondus.

Exemple : ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC) . Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

Propriété : Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

d et P sont sécants

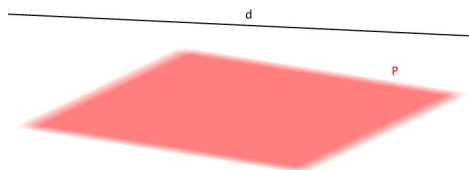


d et P sont sécants en un point I .

d et P sont parallèles



d est incluse dans P .

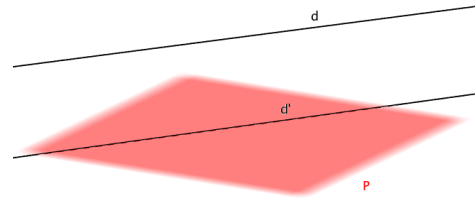


d et P sont strictement parallèles.

Exemple : ABCDEFGH est un cube. La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I . La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG) . La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

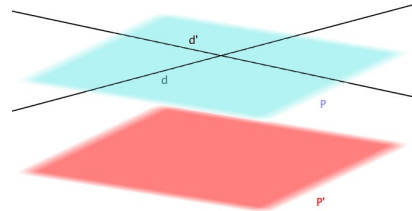
Propriété : Parallélisme droite et plan

Une droite d est parallèle à un plan P s'il existe une droite d' de P parallèle à d .



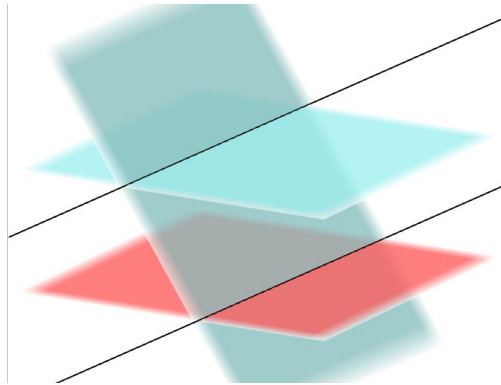
Propriété : Parallélisme de deux plans

Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' , alors les plans P et P' sont parallèles.



Propriété : Parallélisme de deux droites

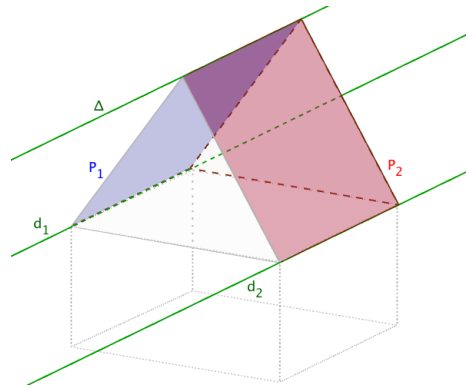
Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.



Propriété : Théorème du toit

P_1 et P_2 sont deux plans sécants.

Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 , alors la droite d'intersection Δ de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2 .



SF 6.5 : Décrire la position relative de deux droites

ABCD est un tétraèdre. Le point I est défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point J est le milieu du segment [AC].

- 1) Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes.
- 2) En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.

SF 6.6 : Décrire la position relative de deux plans

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre O. On définit les points I, J et K par les égalités vectorielles

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CH}.$$

- 1) Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
- 2) Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BH}$.
- 3) Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

4 - Bases et repères dans l'espace

Définition : Base de l'espace

On appelle **base de l'espace** tout triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Définition : Repère de l'espace

Soit $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace. O est un point de l'espace.

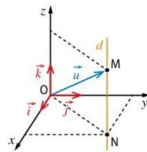
On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. O est appelé **l'origine du repère**. La décomposition

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

donne les coordonnées $(x; y; z)$ du point M. La décomposition

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.



Propriété : Coordonnées de vecteurs et du milieu d'un segment

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

SF 6.7 : Lire sur une figure si des vecteurs forment une base

On considère le cube ABCDEFGH de centre O. I est le milieu de $[FG]$.

1) Justifier que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

2) Exprimer les vecteurs donnés ci-dessous en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

a) $\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{BH}$

c) $\overrightarrow{DI}$

SF 6.8 : Lire les coordonnées dans une base

On considère le pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous. On note I le milieu du côté $[GH]$, J le point tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EF}$ et O le milieu du segment $[AG]$.

1) Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

2) Donner sans justifier les coordonnées des points A, D et E.

3) Déterminer les coordonnées des points G, H, I, J et O.

4) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{GJ}$

b) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{HB}$.