

Tale spé – Chapitre n°7

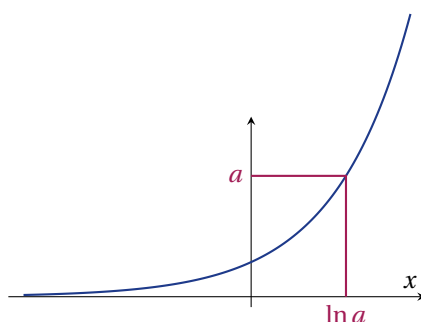
Fonction logarithme népérien

1 - Logarithme népérien d'un réel positif

D'après ce qui a été étudié dans les chapitres précédents, la fonction exponentielle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a strictement positif, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe un unique nombre b tel que

$$e^b = a.$$

Ce nombre b est appelé **logarithme népérien** de a .



Définition : Logarithme népérien

Soit a un réel strictement positif. On appelle **logarithme népérien** de a l'unique solution de l'équation d'inconnue x :

$$e^x = a.$$

Cette unique solution se note $\ln a$.

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \ln :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x). \end{aligned}$$

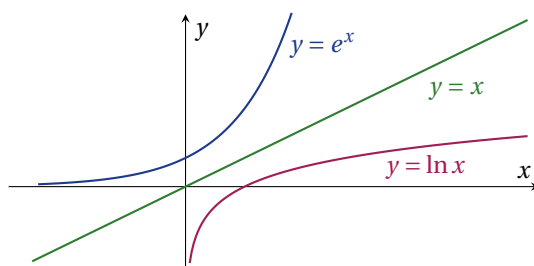
Remarques :

Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont réciproques l'une de l'autre.

Les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Dans le domaine scientifique, on utilise aussi la fonction logarithme décimal, notée $\log$, définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$



Propriété : Conséquences directes

Pour tout réel a **strictement positif**, dire que $e^x = a$ équivaut à dire que $x = \ln a$.

Pour tout réel x **strictement positif**, on a :

$$e^{\ln x} = x$$

Pour tout réel x , on a :

$$\ln(e^x) = x$$

En effet, par définition, $\ln(e^b)$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^b$. Donc $x = b$, et ainsi

$$\ln(e^b) = b.$$

On a aussi :

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

Remarque importante

On a donc :

$$5 = \ln(e^5) \quad \text{et} \quad 5 = e^{\ln 5},$$

car 5 est strictement positif.

Par contre :

$$-3 = \ln(e^{-3}),$$

mais on ne peut pas écrire -3 sous la forme $e^{\ln a}$, car $-3 < 0$.

Propriété : Dérivée de $\ln$, primitive de $1/x$

La fonction logarithme népérien est la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe $\ln x$.

Elle est donc définie sur $]0; +\infty[$, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(Pour tout réel $x > 0$, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ admet comme primitives les fonctions $F(x) = \ln x + k$, où k est un réel)

Démonstration : Dérivée de $\ln$

La fonction $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$. Donc, pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a.$$

En posant $X = \ln x$, on obtient, par composée de limites :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{X - \ln a}{e^X - e^{\ln a}} = \lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{1}{\frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a}}.$$

Comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{X \rightarrow \ln a} \frac{e^X - e^{\ln a}}{X - \ln a} = e^{\ln a} = a.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

Donc, pour tout réel $a > 0$, $(\ln)'(a) = \frac{1}{a}$.

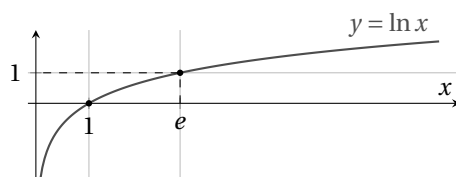
Propriété : Variations

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

En effet, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0.$$

Ainsi, la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.



Propriété : Equations et inéquations

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln a = \ln b \iff a = b$$

et

$$\ln a < \ln b \iff a < b$$

Propriété : Signe de $\ln(x)$

La fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et elle s'annule en 1, puisque $\ln 1 = 0$.

On a donc :

$$\ln x < 0 \text{ sur }]0; 1[, \quad \ln x > 0 \text{ sur }]1; +\infty[, \quad \ln x = 0 \iff x = 1.$$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

Propriété : $\ln(u)$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I . Sa dérivée est la fonction

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$$

(Pour tout réel x tel que $u(x) > 0$, les fonctions de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ admettent comme primitives les fonctions $\ln(u(x)) + k$)

SF 7.1 : Résoudre une équation ou une inéquation avec les logarithmes

1) Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $(E_1) : \ln(2x + 3) = \ln(x)$

b) $(E_2) : 2\ln(x) + 1 = 7$

c) $(E_3) : 3e^x + 2 = 8$

2) Résoudre chacune des inéquations suivantes :

a) $(I_1) : 5\ln(x) < 10$

b) $(I_2) : 5 - 2\ln(x) \geq -1$

c) $(I_3) : e^{x-3} > 5$

SF 7.2 : Étudier les variations d'une fonction avec des logarithmes

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

2) Pour tout réel x de $]3; +\infty[$, on pose :

$$g(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-3}\right).$$

a) Étudier le signe de $\frac{2x}{x-3}$. En déduire l'ensemble de définition de g .

b) Étudier les variations de la fonction g sur son ensemble de définition.

2 - Relation fonctionnelle

En 1614, le mathématicien écossais John Napier, plus connu sous le nom francisé de Neper, publie un ouvrage dans lequel il présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

Les tables logarithmiques permettaient notamment de remplacer une multiplication par une addition. À une époque sans calculatrice, cet outil était particulièrement précieux en astronomie, en navigation et dans le commerce. On savait, bien entendu, effectuer des multiplications, mais avec des nombres à plus de 5 chiffres, l'addition était plus rapide.

Propriété : Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Démonstration : Relation fonctionnelle

On a :

$$e^{\ln(a \times b)} = a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}.$$

Par unicité de l'antécédent par la fonction exponentielle, on en déduit :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b.$$

Propriété : Règles de calcul avec $\ln$

Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout entier relatif p , on a :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a^p) = p \ln a, \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

Démonstration : Règles de calcul avec $\ln$

- Pour tout réel a strictement positif, on a $\frac{1}{a} \times a = 1$. On en déduit :

$$\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln 1. \quad \text{Donc :} \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln a = 0, \quad \text{puis :} \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

- Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

- Pour les puissances, on a par exemple :

$$\ln(a^2) = \ln(a \times a) = 2 \ln a$$

et

$$\ln(a^3) = \ln(a^2 \times a) = \ln(a^2) + \ln a = 3 \ln a.$$

L'égalité $\ln(a^p) = p \ln a$ se généralise à tout entier p par récurrence, puis aux entiers négatifs p avec la formule de l'inverse.

- Enfin, pour tout réel a strictement positif, on a $(\sqrt{a})^2 = a$. Donc :

$$\ln((\sqrt{a})^2) = \ln a.$$

Ainsi :

$$2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a,$$

et donc :

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a.$$

Propriété : Résolution de $x^n = k$

Soient x et k des réels strictement positifs et soit n un entier naturel non nul.

L'équation

$$x^n = k$$

admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution :

$$x = e^{\frac{1}{n} \ln k}.$$

Exemple : On souhaite résoudre l'équation $x^5 = 1000$ sur $]0; +\infty[$. Les nombres x^5 et 1000 étant strictement positifs, cette équation équivaut à

$$\ln(x^5) = \ln(1000),$$

c'est-à-dire

$$5 \ln x = \ln(1000),$$

donc

$$\ln x = \frac{1}{5} \ln(1000),$$

et enfin

$$x = e^{\frac{1}{5} \ln(1000)}.$$

L'ensemble solution est donc

$$S = \left\{ e^{\frac{1}{5} \ln(1000)} \right\}.$$

SF 7.3 : Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture

1) Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ chacun des nombres suivants :

$$\text{a) } \ln(6) \quad \text{b) } \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{c) } \ln\left(\frac{1}{12}\right) \quad \text{d) } \ln(72) \quad \text{e) } \ln\left(\frac{3e^2}{2}\right)$$

2) Simplifier l'expression :

$$A = \ln(\sqrt{3} - 1) + \ln(\sqrt{3} + 1)$$

3) Pour $x \in]1; +\infty[$, on pose :

$$B = \ln(x+3) - 2\ln(x-1)$$

Écrire B sous la forme $\ln(C(x))$, où $C(x)$ est une expression de la variable x .

SF 7.4 : Utiliser la relation fonctionnelle pour résoudre des équations ou des inéquations

1) Résoudre chacune des équations suivantes :

$$\text{a) } (E_1) : \ln(x+1) - \ln(x) = 1 \quad \text{b) } (E_2) : \ln(x+2) + \ln(x) = \ln(8)$$

2) Résoudre l'inéquation :

$$\ln(x+3) + \ln(2-x) \geq \ln(6)$$

3) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$0,9^n \leq 0,1$$

3 - Limites avec les logarithmes

Propriété : Limites de $\ln(x)$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Démonstration : Limites de $\ln(x)$

Soit un intervalle $]A; +\infty[$ quelconque. Montrons que cet intervalle contient toutes les valeurs de $\ln x$ dès que x est suffisamment grand.

On a :

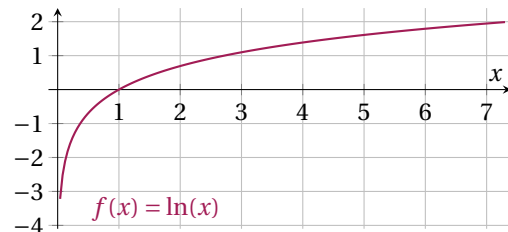
$$\ln x > A \iff x > e^A.$$

Ainsi, dès que $x > e^A$, on a $\ln x \in]A; +\infty[$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Ensuite, lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$.

On peut dresser le tableau de variations complet de la fonction logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$



Propriété : Limites remarquables

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et, pour tout entier non nul n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration : Limites remarquables

En posant $X = \ln x$, on a $x = e^X$ et, lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $X \rightarrow +\infty$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

De même, lorsque $x \rightarrow 0^+$, on pose $X = \ln x$. Alors $X \rightarrow -\infty$ et $x = e^X$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X \times X = 0.$$

Enfin, la fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = 1$. Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1.$$

Comme $\ln 1 = 0$, on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

SF 7.5 : Utiliser les limites de la fonction logarithme

1) Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{\ln(x)}.$$

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale.

2) Soit g la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-3}\right).$$

Déterminer la limite de g en 3.

SF 7.6 : Utiliser la croissance comparée du logarithme népérien et de x^n

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1) $\frac{\ln(x)}{x+1}$ en $+\infty$

2) $g(x) = x^2 - \ln(x)$ en $+\infty$

3) $h(x) = x(\ln(x) - 1)$ en 0^+