

Maths expertes– Chapitre n°1

Les matrices

1 - Matrices et premières opérations

Définition : Matrices

Une matrice de dimension, ou taille, $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes. Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Les nombres a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice. a_{ij} est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On note parfois la matrice A par $[a_{ij}]$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3,15 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 .

Définition : Matrices particulières

Une matrice de dimension $n \times n$ est appelée une **matrice carrée d'ordre n** .

Une matrice de dimension $n \times 1$ est appelée une **matrice colonne**.

Une matrice de dimension $1 \times n$ est appelée une **matrice ligne**.

Matrices particulières, exemples d'ordre 3 :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice nulle

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice unité ou
identité

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice triangulaire
supérieure

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

Exemple : $C = (2 \quad 3,6 \quad 7 \quad 5)$ est une matrice ligne de dimension 1×4 .

$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1 .

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1,6 \\ 7,3 & 12 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée, car elle possède le même nombre de lignes que de colonnes, de dimension 2×2 . On dit qu'elle est d'ordre 2.

Définition : Matrices égales

Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même dimension et ont des coefficients égaux placés aux mêmes positions.

Définition : Somme de matrices

Soient A et B deux matrices de même dimension.

La somme de A et B est la matrice, notée $A + B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans A et B .

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, alors

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Propriété : Commutativité et associativité

Soient A , B et C trois matrices de même dimension. L'addition de matrices est

a) Commutative : $A + B = B + A$.

b) Associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Définition : Produit par un réel

Soit A une matrice et k un nombre réel.

Le produit de A par le réel k est la matrice, notée kA , dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k .

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -2 & 5,5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, alors

$$B = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) & 2 \times 5,5 \\ 2 \times 2 & 2 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Propriété : Produit par un réel

Soient A et B deux matrices de même dimension et k et k' deux réels.

a) $(k + k')A = kA + k'A$.

b) $k(A + B) = kA + kB$.

c) $(kk')A = k(k'A)$.

Avec la calculatrice

Il est possible d'entrer une matrice dans la calculatrice et d'afficher un terme donné.

Par exemple, on peut entrer la matrice A ci-dessous dans la calculatrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & \frac{2}{3} \\ 7 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

	TI	Casio
Accéder au menu Matrices	Appuyer sur les touches permettant d'accéder au menu matrix , puis choisir EDIT .	Accéder au menu RUN-MAT , puis choisir MAT .
Choisir la matrice A	Choisir la matrice $[A]$.	Choisir Mat A.
Indiquer les dimensions de la matrice	Entrer 3, puis 3, en validant à chaque fois.	Choisir Mat A, cliquer sur DIM , puis entrer le nombre n de lignes et le nombre p de colonnes en validant.
Entrer les termes de la matrice	Entrer successivement les coefficients de la matrice.	Entrer successivement les coefficients de la matrice.
Revenir à l'écran de calcul	Revenir à l'écran de calcul.	Revenir à l'écran de calcul.
Rappeler la matrice à l'écran	Rappeler la matrice $[A]$. L'ajout de Frac permet l'affichage des éléments sous forme fractionnaire.	Rappeler Mat A. Il faut entrer les termes fractionnaires de la matrice A avec la touche fraction pour les voir apparaître ainsi à l'écran.
Rappeler un terme de la matrice	Pour afficher le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne, entrer $[A](1,2)$. On obtient 5.	Pour afficher le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne, entrer Mat A[1,2]. On obtient 5.

SF 1.1 : Calculer avec des matrices

Le tableau ci-dessous récapitule les ventes réalisées par différents agents immobiliers dans une agence au cours du premier trimestre 2019.

	Nathalie	Mélanie	Pierre
Maison	15	20	10
Appartement	5	0	10
Terrain	15	10	5

- a) Résumer le tableau des ventes par une matrice A .
- b) Au cours du second trimestre 2019, les ventes de chaque agent, pour chaque type de bien, ont baissé de 20%. Déterminer la matrice des ventes B pour ce second trimestre.
- c) Que représente la matrice $A + B$? Déterminer cette matrice.

SF 1.2 : Déterminer deux matrices égales

x et y désignent deux nombres réels.
On donne

$$A = \begin{pmatrix} 6 + 5x & 4 \\ 1 & 4y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2y & 1 + 3x \\ 1 & 22 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les nombres réels x et y tels que les matrices A et B soient égales.

2 - Multiplication et matrice inverse

Définition : Produit matrice ligne par matrice colonne

Soient $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p)$ une matrice ligne à p colonnes et

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

une matrice colonne à p lignes.

Le produit $A \times B$, aussi noté AB , est la matrice de dimension 1×1 dont l'unique coefficient est égal à $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p$.

Attention : Pour que le produit AB soit possible, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

Exemple : Soient $A = (2 \ 5 \ 8)$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$. On a

$$AB = (2 \times 3 + 5 \times 7 + 8 \times 5) = (81).$$

Définition : Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice colonne ayant p lignes.

Le produit AB est la matrice colonne à n lignes dont les coefficients m_i sont égaux à $L_i B$, où L_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

Attention : Pour que le produit AB soit possible, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

Exemple : Calculer AB , où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \times 10 + 4 \times 4 + 5 \times 20 \\ 3 \times 10 + 1 \times 4 + 6 \times 20 \\ 7 \times 10 + 2 \times 4 + 9 \times 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 \\ 154 \\ 258 \end{pmatrix}.$$

Définition : Produit de deux matrices

Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times r$.

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice C de dimension $n \times r$ obtenue de la façon suivante : le coefficient de C situé à l'intersection des $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de B , selon le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix}$$

avec $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$.

Attention : Pour que le produit AB soit possible, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

La multiplication de matrices n'est pas commutative : en général, $AB \neq BA$.

Propriété : Multiplication par la matrice unité

Pour toute matrice carrée A de taille n , on a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A \times I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + (-2) \times 0 & 3 \times 0 + (-2) \times 1 \\ 1 \times 1 + 4 \times 0 & 1 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Définition : Matrice inverse

Une matrice carrée A de taille n est une matrice inversible s'il existe une matrice B telle que

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

La matrice B , notée A^{-1} , est appelée la **matrice inverse de A** .

Exemple : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre.

Remarque : Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

Propriété : Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Le nombre réel $ad - bc$ est appelé le déterminant de la matrice A . On note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

On a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2.$$

Si $ad - bc \neq 0$, on a $\frac{1}{ad - bc} A \times B = I_2$, soit $A \times \left(\frac{1}{ad - bc} B \right) = I_2$, donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} B.$$

Si $ad - bc = 0$, alors $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc A n'est pas inversible. En effet, si A était inversible d'inverse la matrice C , on aurait $C \times A \times B = I_2 \times B = B$ et

$$C \times A \times B = C \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ce qui est impossible.

SF 1.3 : Multiplier des matrices

On donne

$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & 2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer les matrices $A \times I$, $B \times I$ et $C \times I$.
- 2) Justifier que les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent. Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Comparer les deux produits obtenus ; que peut-on en déduire ?
- 3) Justifier que les produits $A \times A$ et $B \times B$ existent. Déterminer le produit $A \times A$, noté A^2 , et le produit $B \times B$, noté B^2 . Déterminer le produit $B \times B \times B = B^3$.
- 4) Calculer les produits $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$. Que peut-on en déduire ?

SF 1.4 : Déterminer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Démontrer que A est inversible.
- 2) Donner sa matrice inverse.

3 - Exemples de représentations matricielles

Propriété : Résolution d'équation matricielle

Soit A une matrice carrée inversible de taille n et M et N deux matrices carrées ou colonnes de taille n . On a :

$$A \times M = N \quad \text{si, et seulement si,} \quad M = A^{-1} \times N.$$

Démonstration : Résolution d'équation matricielle

$$A \times M = N$$

$$A^{-1} \times (A \times M) = A^{-1} \times N$$

Or

$$(A^{-1} \times A) \times M = I_n \times M = M.$$

Donc

$$M = A^{-1} \times N.$$

Propriété : Résolution d'un système

Soit A une matrice carrée inversible de taille n et B une matrice colonne à n lignes.

Alors le système linéaire d'écriture matricielle $A \times X = B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1}B$.

Remarque : si A n'est pas inversible, alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

Exemple : On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$A \times X = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système peut s'écrire $A \times X = B$ et il a pour solution la matrice colonne $X = A^{-1}B$.

Définition : Matrice d'une transformation

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O . A est une matrice carrée d'ordre 2 et f est la transformation géométrique du plan qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dans cette situation, on dit que A est la **matrice de la transformation f** .

Exemple : Le symétrique de $M(x; y)$ par rapport à l'axe des abscisses est le point $M'(x; -y)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de cette symétrie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

L'image du point $M(x; y)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k est le point $M'(kx; ky)$, car $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

est la matrice de cette homothétie :

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

SF 1.5 : Résoudre une équation matricielle

Déterminer la matrice colonne X vérifiant $AX = X + B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

SF 1.6 : Utiliser la matrice d'une transformation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O .

Dans chaque cas, déterminer la matrice associée à la transformation.

- a) S est la symétrie de centre O .
- b) S' est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

SF 1.7 : Résoudre un système d'équations linéaires

Résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$$