

Maths expertes – Chapitre n°2

Les nombres complexes, point de vue algébrique

Les nombres complexes prennent naissance au XVI^e siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.

En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573), publie *Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*, dans lequel il présente des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de Cardan sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.

À cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.

La notation i apparaît en 1777 avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.

Au XIX^e siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réels » car proches de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

1 - Ensemble des nombres complexes

Définition : Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des **nombres complexes**. Il possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de **manière unique** sous la forme $z = x + iy$ avec x et y réels.

Exemple : $3 + 4i$, $-2 - i$ et $\frac{i}{3}$ sont des nombres complexes.

Définition : Forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire

L'écriture $x + iy$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z .

Le nombre x s'appelle la **partie réelle** et le nombre y s'appelle la **partie imaginaire** de z .

On note $\text{Re}(z) = x$ et $\text{Im}(z) = y$.

Remarques :

- Si $y = 0$, alors z est un nombre **réel**.
- Si $x = 0$, alors z est un nombre **imaginaire pur**.

Exemple : Si $z_1 = 3 + 4i$, alors $\text{Re}(z_1) = 3$ et $\text{Im}(z_1) = 4$.

SF 2.1 : Déterminer une forme algébrique

a) Calculer et exprimer le résultat sous forme algébrique.

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2$$

$$z_4 = \frac{1}{4 - 2i}$$

$$z_5 = \frac{1 + i}{2 - i}$$

b) On donne

$$z_1 = \frac{1 - i}{3 + 5i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + i}{3 - 5i}.$$

Vérifier que $z_1 + z_2$ est un nombre réel et que $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur.

SF 2.2 : Étudier les puissances entières de i

Dans chaque cas, exprimer i^n sous forme algébrique.

a) $n = 4k$

b) $n = 4k + 1$

c) $n = 4k + 2$

d) $n = 4k + 3$

avec $k \in \mathbb{N}$.

e) Calculer $z = (2i)^{13}$.

2 - Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Conjugué

Soit un nombre complexe $z = x + iy$.

On appelle **nombre complexe conjugué** de z , le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $\boxed{\bar{z} = x - iy}$.

Exemple : Si $z = 4 + 5i$, alors $\bar{z} = 4 - 5i$. On peut également noter : $\overline{7 - 3i} = 7 + 3i$, $\overline{i} = -i$ et $\overline{5} = 5$.

Propriété : Premières propriétés du conjugué

- 1) Pour tout nombre complexe z , $\overline{\bar{z}} = z$.
- 2) Pour tout nombre complexe z , $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.
- 3) Pour tout nombre complexe z , z est un nombre réel si, et seulement si, $\bar{z} = z$.
- 4) Pour tout nombre complexe z , z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, $\bar{z} = -z$.
- 5) Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $\boxed{z\bar{z} = x^2 + y^2}$.

Démonstration : Premières propriétés du conjugué

À faire en exercice...

Propriété : Propriétés du conjugué

Soient z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \text{ avec } z \neq 0$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \text{ avec } z' \neq 0$$

Démonstration : Propriétés du conjugué

À faire en exercice...

SF 2.3 : Utiliser les règles de calcul sur les conjugués

1) Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2 - i)(i - 5)$$

$$z_2 = \frac{3 + 2i}{i}$$

2) Dans chaque cas, exprimer le conjugué du nombre complexe Z en fonction de z et $\bar{z}$.

$$Z_1 = z + 2 - i$$

$$Z_2 = (z + 2i)(iz - 3)$$

$$Z_3 = (z - \bar{z})^2$$

$$Z_4 = \frac{z - i}{3 - z}, \text{ avec } z \neq 3$$

3 - Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété : Nombres complexes égaux

Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Résolution d'équations :

Méthode : Technique 1

La résolution d'une équation du premier degré dans $\mathbb{C}$ repose sur la même pratique qu'avec les nombres réels. On cherche à isoler l'inconnue.

Exemple :

$$3z + 5i = 4iz + 2 \iff (3 - 4i)z = 2 - 5i \iff z = \frac{2 - 5i}{3 - 4i}.$$

On donne la réponse sous forme algébrique :

$$z = \frac{2 - 5i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{26 - 7i}{25}.$$

$$\text{Ainsi } S = \left\{ \frac{26}{25} - \frac{7}{25}i \right\}.$$

Méthode : Technique 2

Soit $z = a + ib$, avec a et b deux réels. Il est possible de chercher la partie réelle a et la partie imaginaire b de z . L'équation précédente $3z + 5i = 4iz + 2$ s'écrit alors

$$3(a + ib) + 5i = 4i(a + ib) + 2.$$

On obtient après calculs :

$$3a + i(3b + 5) = -4b + 2 + 4ia.$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire des membres de gauche et de droite, on obtient

$$3a = -4b + 2 \quad \text{et} \quad 3b + 5 = 4a.$$

On aboutit au système

$$\begin{cases} 3a + 4b = 2 \\ 4a - 3b = 5 \end{cases}$$

qui a pour solution $a = \frac{26}{25}$ et $b = -\frac{7}{25}$. Ainsi $S = \left\{ \frac{26}{25} - \frac{7}{25}i \right\}$.

Remarque : l'usage de la technique 2 est incontournable lorsque l'équation comporte l'inconnue et son conjugué, comme par exemple $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$.

SF 2.4 : Résoudre des équations du 1^{er} degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $2z - 5 = 4i + z$

b) $3z + 1 - 2i = 4 - 3i - 2iz$

SF 2.5 : Résoudre des équations faisant intervenir une inconnue et son conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$

b) $z^2 = z \times \bar{z}$

SF 2.6 : Caractériser les nombres réels et les nombres imaginaires purs

1) Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2 - \bar{z}$ soit un nombre réel.

2) Dans chaque cas, déterminer tous les nombres complexes z tels que :

a) $Z = (1 + z)(i + \bar{z})$ soit un réel ;

b) $Z = 2z + 3\bar{z}$ soit un réel ;

c) $Z = 2z + 3\bar{z}$ soit un imaginaire pur.