Le cours – 1ère spé : Application dérivation

Prérequis : Dérivation locale, fonctions dérivées

Variations :

f est **croissante** sur I si et seulement si, $f'(x) \geqslant 0$ sur I.

f est **décroissante** sur I si et seulement si, $f'(x) \leqslant 0$ sur I.

f est **constante** sur I si et seulement si, $f'(x) = 0$ sur I.

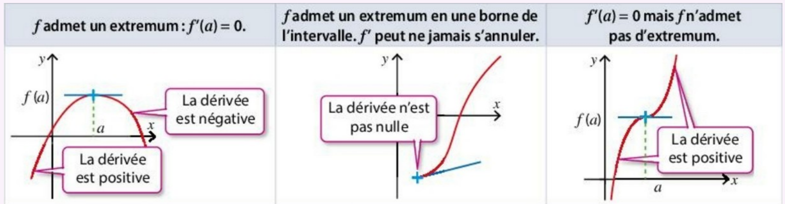
Exemple de tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗	10	↘	

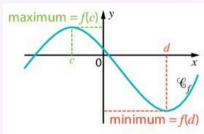
Extremums :

f admet un **maximum** sur I, atteint en c signifie $f(x) \leqslant f(c)$ sur I. $f(c)$ est le **maximum** de f sur I.

f admet un **minimum** sur I, atteint en c signifie $f(x) \geqslant f(c)$ sur I. $f(c)$ est le **minimum** de f sur I.



Si f' **s'annule en changeant de signe** en a, alors f admet un **extremum local** en a.
La **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est alors **parallèle à l'axe des abscisses**.



Signe d'une fonction à partir de son tableau de variation :

Exemples :

x		a	
$f(x)$	↗	0	↗
Signe de $f(x)$	–	0	+

x		a	
$f(x)$	↗	négatif	↘
Signe de $f(x)$		–	

Les méthodes – 1ère spé : Application dérivation

Étudier les variations d'une fonction

On donne la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

1) Déterminer l'expression de la dérivée de f et étudier son signe.
2) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3) En déduire les extremums de la fonction et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Solutions :

1) La dérivée de la fonction f a pour expression : $f'(x) = \frac{2}{3}\times 3x^2 - \frac{3}{2}\times 2x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$. f' est une fonction polynôme de degré 2. On étudie son signe :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times 2\times(-2) = 25$.
$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2\times 2} = 2$.

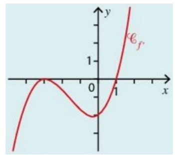
$a > 0$, donc f' est négative entre les racines, donc sur $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$, et positive à l'extérieur des racines, donc sur $\left]-\infty\,; -\frac{1}{2}\right] \cup [2\,;+\infty[$.

2) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-3		$-\frac{1}{2}$		2		3
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	$-\frac{49}{2}$	↗	$\frac{37}{24}$	↘	$-\frac{11}{3}$	↗	$-\frac{1}{2}$

3) D'après le tableau de variation, le minimum de f est $-\frac{49}{2}$ atteint pour $x = -3$ et le maximum de f est $\frac{37}{24}$ atteint pour $x = -\frac{1}{2}$.

Utiliser la courbe représentative de f'



On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction f admet des extremums.

Solutions :

Grace au graphique, nous pouvons déterminer le signe de f' et donc les variations de f. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	–	0	+	
f		↘		↘		↗	

f admet donc un minimum en 1. Les données ne nous permettent pas de déterminer la valeur de ce minimum.

Étudier la position relative de deux courbes

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4$ et $g(x) = 27x - 5$ et leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère. Montrer que le point $(1;22)$ est commun aux deux courbes et déterminer la position relative de ces deux courbes.

Solutions :

$f(1) = -9 + 27 + 4 = 22$ et $g(1) = 27 - 5 = 22$ donc le point $(1;22)$ est bien commun aux deux courbes.

Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$:

$f(x) - g(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4 - 27x + 5 = -9x^3 + 27x^2 - 27x + 9 = -9(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -9(x-1)^3$

$(x-1)^3$ est du signe de $x-1$, donc les signe de $-9(x-1)^3$ est du signe opposé à $x-1$:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$-9(x-1)^3$	$+$ 0 $-$

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty;1]$ et que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $[1;+\infty[$.

Exploiter les variations pour déterminer un signe

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 18$.
1) Démontrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $f(2)$ et en déduire le signe de $f(x)$.
3) Montrer que, pour tout $x \geqslant 2$, on a $x^3 \geqslant -5x + 18$.

Solutions :

1) $f'(x) = 3x^2 + 5$. Puisque $f'(x)$ est la somme de deux termes positifs, alors $f'(x)$ est positif. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $f(2) = 2^3 + 5\times2 - 18 = 0$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que, pour $x \leqslant 2$, $f(x) \leqslant 0$ et que, pour $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 0$.

3) D'après la question précédente, pour $x \geqslant 2$ on a $x^3 + 5x - 18 \geqslant 0$ soit $x^3 \geqslant -5x + 18$.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :