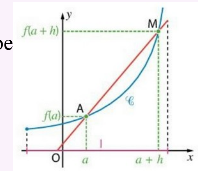
Le cours – 1ère spé : Dérivation locale

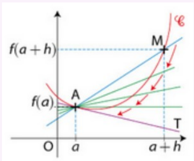
Nombre dérivé :

Coefficient directeur d'une droite (AB) : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Taux de variation entre a et b : $\tau = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Il s'agit de la **pente de la sécante** à la courbe entre les points d'abscisses a et b.



Taux de variation entre a et $a+h$: $\tau = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Il s'agit de la **pente** de (AM)



Nombre dérivé en a se note $f'(a)$:

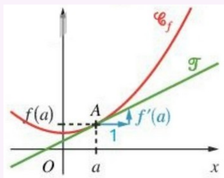
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

Équation de tangente:

Équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Les méthodes – 1ère spé : Dérivation locale

Calculer le taux de variation et la pente d'une sécante :

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - x$.
1) Calculer la pente de la sécante à la courbe de f entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4.
2) Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.

Solutions :

1) La pente de la sécante à la courbe de f entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4 est égale à $\dfrac{f(4) - f(1)}{4-1}$.

Or, $f(4) = 2 \times 4^2 - 4 = 28$ et $f(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1$.

Ainsi, $\dfrac{f(4) - f(1)}{4-1} = \dfrac{28-1}{3} = 9$. La pente recherchée est donc égale à 9.

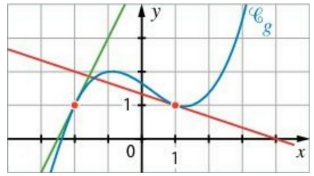
2) Le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est : $\tau = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

On a $f(2) = 2 \times 2^2 - 2 = 6$ et $f(2+h) = 2 \times (2+h)^2 - (2+h) = 2 \times (4 + 4h + h^2) - (2+h) = 8 + 8h + 2h^2 - 2 - h = 2h^2 + 7h + 6$

Ainsi, $\tau = \dfrac{2h^2 + 7h + 6 - 6}{h} = \dfrac{2h^2 + 7h}{h} = \dfrac{h(2h+7)}{h} = 2h + 7$

Le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est donc $2h+7$.

Déterminer graphiquement un nombre dérivé :



On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.
1) Déterminer graphiquement le nombre dérivé de g en -2.
2) Déterminer graphiquement $g'(1)$.
3) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Solution :

1) Le nombre dérivé de g en -2, $g'(-2)$, est la pente de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -2. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (-2 ; 1) et (-1 ; 3) appartiennent à cette tangente (droite verte). On a donc :
$g'(-2) = \dfrac{3-1}{-1-(-2)} = 2$.

2) $g'(1)$ est la pente de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4 ; 0) appartiennent à cette tangente (droite rouge). On a donc :
$g'(1) = \dfrac{0-1}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$.

3) L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 est donnée par : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$. Par lecture graphique, $g(1) = 1$, et nous savons déjà que $g'(1) = -\dfrac{1}{3}$. Nous obtenons alors :

$y = -\dfrac{1}{3}(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 est donc $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

Déterminer l'équation d'une tangente :

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
1) Calculer $f'(0)$.
2) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Solution :

1) Le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ est :

$$\tau = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} - \frac{0+1}{0-1}}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + 1}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + \frac{h-1}{h-1}}{h} = \frac{\frac{2h}{h-1}}{h} = \frac{2h}{h-1} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{h-1}$$

On a donc $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2}{h-1} = -2$

2) L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Nous avons $f(0) = -1$ et $f'(0) = -2$, d'où $y = -2(x-0) - 1 = -2x - 1$

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y = -2x - 1$.