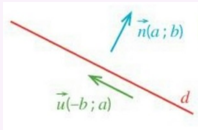
Le cours – 1ère spé : Droites et cercles

Prérequis : Vecteurs sans coordonnées, coordonnées de vecteurs, droites et systèmes, produit scalaire

Vecteur directeur d'une droite et critère de colinéarité :

Un **vecteur directeur** d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.



$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si $det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$.

Vecteur normal à une droite

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul **orthogonal à un vecteur directeur de d**, donc à tout vecteur directeur de d.

Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, A un point de d et M un point du plan. M appartient à d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

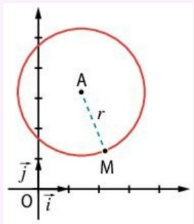
Si d est une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, un vecteur normal à d est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ (et réciproquement)

Équation d'un cercle

Cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon r : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Tout cercle a une équation de la forme $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

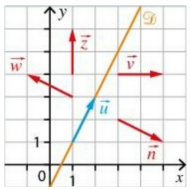
(parabole : $y = ax^2 + bx + c$)



Les méthodes – 1ère spé : Droites et cercles

Identifier des vecteurs normaux à une droite

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur. Quels sont, parmi les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{w}$, $\vec{v}$ et $\vec{z}$ représentés sur la figure ci-contre, les deux vecteurs normaux à $\mathscr{D}$?



__Solutions :__

D'après la figure, on conjecture que les deux vecteurs normaux à $\mathscr{D}$ sont $\vec{n}$ et $\vec{w}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\vec{w}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
$\vec{n}.\vec{u} = 2\times1 + (-1)\times2 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont donc bien orthogonaux.
$\vec{w}.\vec{u} = -2\times1 + 1\times2 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont donc bien orthogonaux.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à une droite donnée

1) Soit $\mathscr{D}_1$ la droite passant par le point $A(2 ; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_1$.

2) Soit $\mathscr{D}_2$ la droite dont une équation cartésienne est $-x - 4y + 1 = 0$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_2$.

__Solutions :__

1) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ donc $\mathscr{D}_1$ admet une équation cartésienne de la forme $3x + y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. On en déduit que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$.

2) Avec l'équation cartésienne, on déduit directement un vecteur normal à $\mathscr{D}_2$: $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

Déterminer une équation cartésienne de droite

Soit Δ une droite passant par le point $A(2 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de Δ.

__Solutions :__

$$\begin{aligned}M(x ; y) \text{ appartient à } \mathscr{D} &\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -1\times(x-2) + 2\times(y-1) = 0\\ &\Leftrightarrow -x + 2 + 2y - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow -x + 2y = 0\end{aligned}$$

On en déduit qu'une équation cartésienne de Δ est $-x + 2y = 0$.

Déterminer une équation de cercle

Soient les points $A(1 ; 1)$ et $B(5 ; -2)$.
Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. Déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

__Solutions :__

Méthode n°1 :

Le centre de $\mathscr{C}$ est le milieu I de $[AB]$. Ses coordonnées sont donc : $I\left(\frac{1+5}{2} ; \frac{1-2}{2}\right)$ soit $I\left(3 ; -\frac{1}{2}\right)$. Le rayon est la longueur AI. On a donc $r^2 = AI^2 = (3-1)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Donc $\mathscr{C}$ admet pour équation $(x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

Méthode n°2 :

$$\begin{aligned}M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0\\ &\Leftrightarrow (1-x)(5-x) + (1-y)(-2-y) = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + y = -3\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -3\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.\end{aligned}$$