# Le cours – 1ère spé : Fonction exponentielle

### *Définition :*

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ .

On note cette fonction $f(x) = \exp(x)$ . On la note aussi $\exp(x) = e^x$ .

On a ainsi $\exp(1) = e$ . La valeur approchée de $e$ est $e \approx 2{,}71828$

### *Fonction exponentielle :*

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

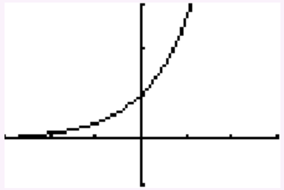
$$e^x > 0$$

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est (par définition)

$$(e^x)' = e^x$$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $(e^x)'$ | + | |
| $e^x$ | 0 ↗ | $+\infty$ |



$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

(programme de terminale)

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e$$

### Résolution d'équations, inéquations :

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

exemples

$e^{x+3} = e^2 \Leftrightarrow x+3 = 2$ ...

$e^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} > e^0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0$ ...

### Dérivée d'une composée :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

### *Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :*

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

# Les méthodes – 1ère spé : Fonction exponentielle

### *Résolutions d'équations, inéquations :*

**Résoudre** $e^{2x+3} = e^x$

$e^{2x+3} = e^x$
$\Leftrightarrow 2x+3 = x$
$\Leftrightarrow x = -3$

La solution est donc : $S = \{-3\}$

**Résoudre** $2e^x + 5 = 7$

$2e^x + 5 = 7$
$\Leftrightarrow 2e^x = 2$
$\Leftrightarrow e^x = 1$
$\Leftrightarrow e^x = e^0$
$\Leftrightarrow x = 0$

La solution est donc : $S = \{0\}$

**Résoudre** $e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$
$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$
$\Leftrightarrow x \geq 0$

**L'astuce de remplacer 1 par $e^0$ est souvent utilisée**

La solution est donc : $S = [0\,;+\infty[$

**Résoudre** $\dfrac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geqslant e^6$

$\dfrac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geqslant e^6$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{(x+3)+(2-x)}}{e^{-x^2+3}} \geqslant e^6$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^5}{e^{-x^2+3}} \geqslant e^6$

$\Leftrightarrow e^{5-(-x^2+3)} \geqslant e^6$

$\Leftrightarrow e^{x^2+2} \geqslant e^6$

$\Leftrightarrow x^2+2 \geqslant 6$

$\Leftrightarrow x^2-4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geqslant 0$

**Second degré à bien réviser !**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | ⋮ | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | ⋮ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(x-2)(x+2)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Avec le tableau de signe, on trouve finalement $S = ]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$

### *Simplifications :*

**Simplifier le nombre** $A = \dfrac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$e = e^1$

$A = \dfrac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$A = \dfrac{e^1 \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$A = \dfrac{e^{2-2x+1} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$A = \dfrac{e^{-2x+3} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$A = \dfrac{e^{-2x+3} \times e^{5x}}{e^{x-2}}$

$A = \dfrac{e^{-2x+3+5x}}{e^{x-2}}$

$A = \dfrac{e^{3x+3}}{e^{x-2}}$

$A = e^{(3x+3)-(x-2)}$

$A = e^{2x+5}$

***Études de fonctions :***

**1) Étudier de la fonction $f(x) = x - e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ .**

$f'(x) = 1 - e^x$ . Pour étudier le signe de $f'$, **on résout l'inéquation $1 - e^x \geq 0$** :

$1 - e^x \geq 0$
$e^x \leq 1$
$e^x \leq e^0$
$x \leq 0$

Donc $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; 0]$ . De même, $f'(x) \leq 0$ sur $[0 ; +\infty[$ .
On obtient donc le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | |

**2) Étudier de la fonction $f(x) = e^{-2x+3}$ définie sur $\mathbb{R}$ .**

$f$ est de la forme $f(x) = e^u$ .
On a donc $f'(x) = -2\,e^{-2x+3}$ .
Or, $e^{-2x+3} > 0$ , donc $-2e^{-2x+3} < 0$ sur $\mathbb{R}$ .

**Il y a souvent des signes "évidents" !**

$f'(x) \leq 0$ , donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ .

***Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :***