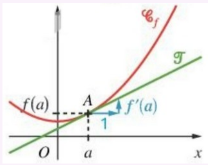
Le cours – 1ère spé : fonctions dérivées

Équation de tangente :

Équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$f'(a)$ correspond au **coefficient directeur de la tangente**.



Dérivation des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Ensemble de définition	Fonction dérivée $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

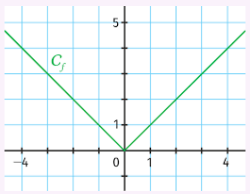
Opérations sur les fonctions dérivées :

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une **somme**	$u+v$	$u'+v'$
Dérivée d'un produit par une constante	ku	ku'
Dérivée d'un **produit**	$u\times v$	$u'\times v + u\times v'$
Dérivée d'un **inverse**	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un **quotient**	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\times v - u\times v'}{v^2}$
Composée exponentielle	e^u	$u'\times e^u$
Composée	$g(u)$ $g(ax+b)$	$u'\times g'(u)$ $a\times g'(ax+b)$

Fonction valeur absolue :

$f(x) = |x| \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} -x & ,si\ x\leq 0 \\ x & ,si\ x>0 \end{cases}$

La fonction valeur absolue **n'est pas dérivable en 0**.



Les méthodes – 1ère spé : Fonctions dérivées

Étudier la dérivabilité d'une fonction :

Soit a un nombre réel quelconque.
A l'aide du taux de variation, montrer que la fonction $f(x)=x^2$ est dérivable en a puis retrouver l'expression de la dérivée de la fonction carré.

Solutions :
Pour étudier la dérivabilité de f en a, il faut tout d'abord s'intéresser aux taux de variation de f en a :

$$\tau_a = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$$

Lorsque h devient très proche de zéro, cette quantité se rapproche de $2a$ qui est un nombre fini. La fonction est donc dérivable en a et on a $f'(a) = 2a$.

Déterminer la fonction dérivée :

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1) $f(x)=3x+5$ **2)** $f(x)=\sqrt{x}$ **3)** $f(x)=x^7$ **4)** $f(x)=\sqrt{2}$ **5)** $f(x)=-3+2x$

Solutions :

1) $f'(x)=3$ **2)** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **3)** $f(x)=7x^6$ **4)** $f(x)=0$ **5)** $f(x)=2$

Déterminer la dérivabilité et la fonction dérivée :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) elle est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f(x)=7x^2-5x$ **2)** $g(x)=\frac{3}{x}$ **3)** $h(x)=\frac{3x+1}{2x^2+5}$ **4)** $m(x)=\sqrt{x}(6x^3-2)$

Solutions :

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'=u'+v'$. $u(x)=7x^2$, donc $u'(x)=14x$ et $v(x)=-5x$, donc $v'(x)=-5$. On en déduit $f'(x)=14x-5$.

2) g est de la forme ku avec $k=3$ et $u(x)=\frac{1}{x}$. Donc g est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

$g'(x)=k\,u'(x)=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}$.

3) h est un quotient de deux fonctions $u(x)=3x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(x)=2x^2+5$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x, $v(x)\geqslant 5>0$, donc v ne s'annule pas. La fonction h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. On obtient donc :

$$h' = \frac{3\times(2x^2+5)-(3x+1)\times 4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15-(12x^2+4x)}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15-12x^2-4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{-6x^2-4x+15}{(2x^2+5)^2}$$

4) h est le produit de deux fonctions $u(x)=\sqrt{x}$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et $v(x)=6x^3-2$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que m est dérivable sur $]0;+\infty[$, et $m'=u'v+uv'$. On obtient donc :

$$m' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times(6x^3-2) + \sqrt{x}\times 18x^2 = \frac{3x^3-1}{\sqrt{x}} + \frac{x\times 18x^2}{\sqrt{x}} = \frac{21x^3-1}{\sqrt{x}}$$