Le cours – 1ère spé : Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle :

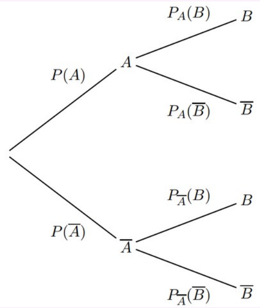
Soit A et B deux événements avec $P(A)\neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$$

$$0\leq P_A(B)\leq 1,\ P_A(\overline{B})=1-P_A(B)$$

Arbres pondérés et tableaux :



	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Formule des probabilités totales :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une **partition de l'univers**, alors $P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\ldots+P(A_n\cap B)$

Cas particulier de 2 événements :

Si A et $\overline{A}$ constituent une **partition de l'univers**, alors :

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$$

Événements indépendants :

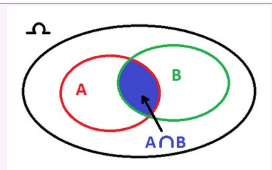
On dit que deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

On a alors $P_A(B)=P(B)$ et $P_B(A)=P(A)$. Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Probabilité de l'union :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



Les méthodes – 1ère spé : Probabilités conditionnelles

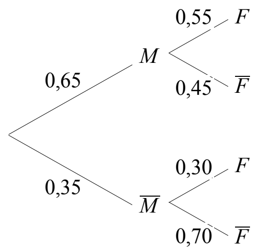
Utiliser un arbre pondéré :

Dans un restaurant, 65 % des clients viennent déjeuner le midi, le reste vient le soir. Parmi les clients du midi, 55 % commandent une formule entrée-plat-dessert, contre 30 % pour les clients du soir.
On note :
F l'évènement "le client commande une formule entrée-plat-dessert".
M l'évènement "le client vient le midi"
1) Comment note-t-on l'évènement "le client vient le soir" ?
2) Construire un arbre de probabilités avec les données
3) Traduire par une phrase l'évènement $F\cap M$ et calculer sa probabilité.
4) Montrer que le probabilité de F est 0,4625.
5) Un client a commandé une formule entrée-plat-dessert. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il soit un client du midi ?

Solution :

1) l'évènement "le client vient le soir" se note $\overline{M}$.

2)



3) $F\cap M$ est l'évènement "le client vient le midi et commande une formule entrée-plat-dessert"

$P(F\cap M)=P(M)\times P_M(F)=0{,}65\times 0{,}55=0{,}3575$.

4) M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :
$P(F)=P(M\cap F)+P(\overline{M}\cap F)$
$=P(M)\times P_M(F)+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(F)$
$=0{,}65\times 0{,}55+0{,}35\times 0{,}30=0{,}4625$

5) Nous recherchons $P_F(M)$. Avec la formule du cours, nous avons :
$P_F(M)=\dfrac{P(F\cap M)}{P(F)}=\dfrac{0{,}3575}{0{,}4625}\approx 0{,}773$.

Évènements indépendants :

1) Dans chacun des cas, dire si les évènements A et B sont indépendants :
a) $P(A)=\dfrac{1}{5}$, $P(B)=\dfrac{1}{2}$ et $P(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$.
b) $P(A)=0{,}4$, $P_A(B)=0{,}4$ et $P_B(A)=0{,}7$.

Solution :

a) $P(A)\times P(B)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$. On a $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$. Donc les évènements A et B sont indépendants.

b) $P(A)\neq P_B(A)$, donc les évènements ne sont pas indépendants.

2) Soient A et B deux évènements indépendants tels que $P(A)=0{,}3$ et $P(B)=0{,}8$. Calculer $P(A\cap B)$.

Solution :

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}3\times 0{,}8=0{,}24$

Utiliser un tableau :

On donne le tableau suivant où A et B sont deux évènements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire :

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,32		
$\overline{A}$		0,2	0,36
Total			

1) Compléter le tableau en justifiant.
2) Calculer $P_A(B)$.
3) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Solution :

1) $P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}36 - 0{,}2 = 0{,}16$
$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = 0{,}32 + 0{,}16 = 0{,}48$
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$
$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0{,}64 - 0{,}32 = 0{,}32$

On a donc :

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,32	0,32	0,64
$\overline{A}$	0,16	0,2	0,36
Total	0,48	0,52	1

2) $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}32}{0{,}64} = 0{,}5$.

3) $P(B) \neq P_A(B)$, donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :