Le cours – 1ère spé : Produit scalaire

Prérequis : Vecteurs sans coordonnées, coordonnées de vecteurs

Définition et propriétés :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$$

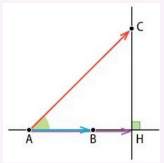
$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u} \qquad \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w} \qquad (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}),\ k\in\mathbb{R}$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires et de même sens**, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires et de sens contraires**, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB\times AC$

Projection orthogonale :

Soit H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB). Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$



Caractérisation de l'orthogonalité :

$\vec{u}.\vec{v} = 0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (s'ils sont non nuls)

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires**.

Expression dans un repère orthonormé :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$

En particulier $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}.\vec{u})} = \sqrt{(x^2+y^2)}$ et $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

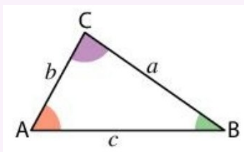
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx'+yy' = 0$

Application du produit scalaire :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v} \qquad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$

L'application de la deuxième formule dans un triangle ABC donne la formule d'Al-Kashi :

$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A}) \qquad b^2 = a^2+c^2-2ac\cos(\hat{B}) \qquad c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\hat{C})$

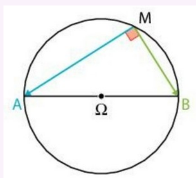


Théorème de la médiane, caractérisation du cercle :

Théorème de la médiane : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = M\Omega^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

Caractérisation du cercle : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

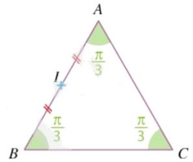
Si, dans un cercle, un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point de ce cercle alors ce triangle est rectangle.



Les méthodes – 1ère spé : Produit scalaire

Calculer des produits scalaires

ABC est un triangle équilatéral de côté 2. I est le milieu du segment $[AB]$. Calculer les produits scalaires suivants :



1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ **2)** $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ **3)** $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

Solutions :

1) $BC = BA = 2$, et comme ABC est équilatéral, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$, donc

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = BC\times BA\times\cos(\widehat{ABC}) = 2\times2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\times2\times\frac{1}{2} = 2.$

2) $AC = 2$, $AI = 1$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$, donc

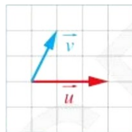
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = AI\times AC\times\cos(\widehat{IAC}) = 1\times2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1\times2\times\frac{1}{2} = 1.$

3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = -CB\times CA\times\cos(\widehat{ACB}) = -2\times2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\times2\times\frac{1}{2} = -2$

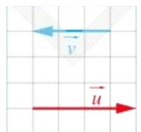
Choisir une expression adaptée pour calculer un produit scalaires

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$, l'unité de longueur étant le carreau.

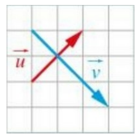
1)



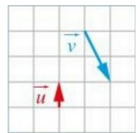
2)



3)



4)



Solutions :

1) Nous pouvons définir 3 points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 3\times1 = 3$.

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, donc $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = -4\times3 = -12$

3) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, donc $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

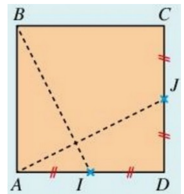
4) En projetant orthogonalement le vecteur $\vec{v}$ sur la droite de direction du vecteur $\vec{u}$, on obtient : $\vec{u}.\vec{v} = -1\times2 = -2$.

Calculer un produit scalaire en décomposant des vecteurs

$ABCD$ est un carré de côté a, I le milieu de $[AD]$ et J est le milieu de $[CD]$.

1) En remarquant que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}$ et que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}$, calculer $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}$.

2) Que peut-on en conclure ?



Solutions :

1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI} &= \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{AI}\\ &= 0+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}+0\\ &= AD\times AI-DJ\times BA\\ &= a\times\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\times a=0\end{aligned}$$

2) On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux et que les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires.

Calculer un produit scalaire avec des coordonnées

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$, ainsi que les points $A(2;3)$, $B(-5;4)$, $C(-1;-3)$ et $D(-1;1)$. Calculer les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

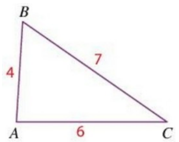
Solutions :

$\vec{u}.\vec{v}=2\times(-3)+(-1)\times 5=-6-5=-11$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5-2\\4-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\1-(-3)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$. On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-7\times 0+(1)\times 4=4$.

Calculer un produit scalaire dans un triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB=4$, $AC=6$ et $BC=7$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Solutions :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{CB}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)=\frac{1}{2}\left(4^2+6^2-7^2\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Déterminer une ligne de niveau

A et B sont deux points distincts tels que $AB=4\,cm$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=40$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solutions :

Soit I le milieu de $[AB]$. D'après le théorème de la médiane, on a :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=40 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=40 \Leftrightarrow MI^2=40+\frac{6^2}{4} \Leftrightarrow MI=7$. L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I et de rayon 7.

Calculer des longueurs et des angles dans un triangle

ABC est un triangle tel que $AB=6$, $AC=12$ et $\widehat{BAC}=60°$.

1) Calculer BC et en déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{BCA}$.

2) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

Solutions :

1) D'après la formule d'Al-Kashi, on a

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= 6^2+12^2-2\times 6\times 12\times\cos(60°)=108\end{aligned}$$

On a donc $BC=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

On utilise de nouveau la formule d'Al-Kashi :

$AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos\left(\widehat{BCA}\right)$

donc $6^2=12^2+108-2\times 12\times 6\sqrt{3}\times\cos\left(\widehat{BCA}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{BCA}\right)=\frac{-216}{-144\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\widehat{BCA}=30°$.

2) La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à 180°, on en déduit : $\widehat{ABC}=180°-60°-30°=90°$.

On peut en conclure que le triangle ABC est rectangle en B.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :