Le cours – 1ère Spé : Second degré

Prérequis : Fonctions de référence

Polynôme du second degré :

La fonction qui, à tout réel x associe $\color{red}{\boldsymbol{a\,x^2+b\,x+c}}$ où a est un réel non nul, est une **fonction polynôme du second degré**.
Les réels a, b et c sont les **coefficients de ce polynôme**.
Soit f une fonction polynôme du second degré. Les **racines** de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation $a\,x^2+b\,x+c=0$.

Forme factorisée :

Si f est une fonction polynôme du second degré **ayant deux racines distinctes** x_1 et x_2, alors f peut s'écrire sous **forme factorisée** : $\boldsymbol{f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)}$. On a alors $\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$ et $\boldsymbol{x_1\times x_2=\frac{c}{a}}$.

Forme canonique :

Pour tout polynôme $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$, il existe deux réels α et β tels que :

$$f(x)=a\,x^2+b\,x+c=a(x-\alpha)^2+\beta.$$

$\boldsymbol{a(x-\alpha)^2+\beta}$ est la **forme canonique** du polynôme $a\,x^2+b\,x+c$. On a $\boldsymbol{\alpha=-\frac{b}{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta=f(\alpha)}$

La représentation graphique de f est une **parabole** dont le sommet S a pour coordonnées $S(\alpha\,;\beta)$. La droite d'équation $x=\alpha$ est un **axe de symétrie** de la parabole.

Résolution de l'équation $a\,x^2+b\,x+c=0$:

Le réel b^2-4ac, noté Δ, est appelé **discriminant** du polynôme $a\,x^2+b\,x+c$.

Si $\boldsymbol{\Delta>0}$, l'équation du second degré a **deux solutions** distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et la forme factorisée est $a\,x^2+b\,x+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Si $\boldsymbol{\Delta=0}$, l'équation du second degré a **une solution** :

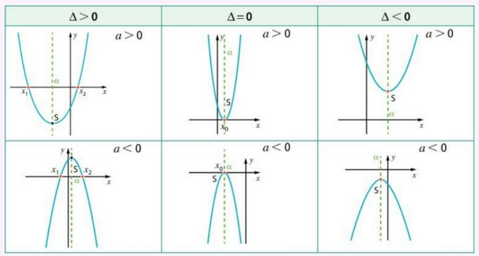
$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

et la forme factorisée est $a\,x^2+b\,x+c=a(x-x_0)^2$

Si $\boldsymbol{\Delta<0}$, l'équation du second degré n'a **pas de solution réelle**. Le polynôme ne peut pas être factorisé.

Signe et variations du polynôme :

Signe de Δ	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Signe de $f(x)=ax^2+bx+c$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: signe de a 0 signe de $-a$ 0 signe de a	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: signe de a 0 signe de a	x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: signe de a



Si $a>0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(\alpha)$	↗

Si $a<0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘

Les méthodes – 1ère Spé : Second degré

Écrire sous forme canonique un polynôme du second degré :

Déterminer la forme canonique du trinôme $f(x)=-x^2+2x-5$.

Solutions :

Méthode n°1 :
f est une fonction polynôme de degré 2, de coefficients $a=-1$, $b=2$ et $c=-5$. Son écriture canonique est $-(x-\alpha)^2+\beta$ avec : $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{-2}=1$ et $\beta=f(\alpha)=f(1)=-4$.
Donc pour tout x réel, $f(x)=-(x-1)^2-4$.

Méthode n°2 :
On factorise f par $a=-1$: $f(x)=-(x^2-2x+5)$. Puis en remarquant que $x^2-2x=(x-1)^2-1$, on obtient :
$f(x)=-[(x-1)^2-1+5]=-(x-1)^2-`4$.

Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2 :

Étudier les variations des fonctions f et g définies sur ℝ par : $f(x)=3-(x+2)^2$ et $g(x)=2x^2+4x-3$

Solutions :

Pour f, on reconnaît la forme canonique avec $a=-1$, $\alpha=-2$ et $\beta=3$. Le sommet de la parabole est donc $S(-2\,;3)$ et étant donné le signe de a, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et strictement décroissante sur $[-2\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘

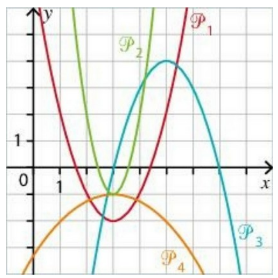
Pour g, on a $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{4}=-1$ et $\beta=g(\alpha)=g(-1)=-5$. Le sommet de la parabole est donc $S(-1\,;-5)$ et étant donné le signe de a, g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ et strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	↘	-5	↗

Identifier la forme d'une fonction polynôme de degré 2 :

Sans calculatrice, associer chaque fonction polynôme ci-dessous à la parabole qui la représente.

$f(x)=-1+3(x-3)^2$, $\qquad g(x)=-1-0{,}25(x-3)^2$
$h(x)=x^2-6x+7$, $\qquad i(x)=(x-3)(7-x)$



Solutions :

On peut écrire la fonction i : $i(x) = -(x-3)(x-7)$. C'est une forme factorisée. Les racines de i sont donc 3 et 7. Sa représentation graphique coupe donc l'axe des abscisses aux points $(3\,;0)$ et $(7\,;0)$: il s'agit de $\mathscr{P}_3$.
f est sous forme canonique. Elle admet un minimum (car $a>0$) pour $x = 3$ qui vaut -1. Sa courbe représentative est $\mathscr{P}_2$.
g est sous forme canonique. Elle admet un maximum (car $a<0$) pour $x = 3$ qui vaut -1. Sa courbe représentative est $\mathscr{P}_4$.
Par élimination, la courbe représentative de h est $\mathscr{P}_1$.

Résoudre une équation du second degré :

Résoudre les équations suivantes :
1) $x^2 - 3x + 1 = 0$ **2)** $x^2 + x + 1 = 0$ **3)** $0{,}3\,x^2 - 3x + 7{,}5 = 0$

Solutions :

1) On calcule le discriminant Δ. On a $a = 1$, $b = -3$ et $c = 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times1\times1 = 5$
$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

2) On calcule le discriminant Δ. On a $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times1\times1 = -3$
$\Delta < 0$, donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

3) On calcule le discriminant Δ. On a $a = 0{,}3$, $b = -3$ et $c = 7{,}5$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times0{,}3\times7{,}5 = 0$
$\Delta = 0$, donc l'équation admet une unique solution réelle :
$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times0{,}3} = \frac{3}{0{,}6} = 5.$

Factoriser un trinôme du second degré :

Déterminer les racines éventuelles et en déduire, si possible, une expression factorisée des trinômes suivants.
1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ **2)** $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$ **3)** $h(x) = 18x^2 - 12x + 2$

Solutions :

1) $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times3\times2 = -20$
$\Delta < 0$, donc f ne peut pas être factorisé.

2) $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\times(-2)\times3 = 49$
$\Delta > 0$, donc g possède deux racines réelles :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{2\times(-2)} = 3$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{2\times(-2)} = -\frac{1}{2}$
On peut donc factoriser g : $g(x) = -2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x-3) = (-2x-1)(x-3)$

3) $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\times18\times2 = 0$
$\Delta = 0$, donc h possède une unique racine réelle :
$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2\times18} = \frac{1}{3}.$
On peut donc factoriser h : $h(x) = 18\left(x - \frac{1}{3}\right)^2.$

Détecter les racines d'un polynôme du second degré :

Soit le polynôme $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$. Trouver une racine évidente de $f(x)$ et en déduire la deuxième racine.

Solutions :

Pour $x = 1$, on a $f(1) = 5\times1^2 - 4\times1 - 1 = 0$, donc 1 est une racine évidente. Soit x_2 la deuxième racine.
$1\times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{5}$, donc $x_2 = -\frac{1}{5}$.

Étudier le signe d'un trinôme du second degré :

Étudier le signe des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : **1)** $f(x) = -3x^2 - 5x + 2$ et **2)** $g(x) = 2x^2 - 4x + 2{,}4$

Solutions :

1) Pour f, $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times(-3)\times2 = 49$.
$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{2\times(-3)} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{2\times(-3)} = -2.$
$a < 0$, on obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) Pour g, $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times2\times2{,}4 = -3{,}2$.
$\Delta < 0$, donc le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

Résoudre des inéquations :

Résoudre les inéquations suivantes :
1) $(2x+1)(3-x) > 0$ **2)** $-2x^2 + 5x \leqslant 4$ **3)** $(x-4)^2 \leqslant (-5x+2)^2$

Solutions :

$(2x+1)(3-x) > 0$

Le trinôme est sous forme factorisée. Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 3. Comme a < 0 (a $= -2$) :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S} = \left]-\frac{1}{2}\,;3\right[$

$$-2x^2 + 5x \leqslant 4$$
$$-2x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$$

$\Delta = (5)^2 - 4\times(-2)\times(-4) = -7$
Le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
Comme $a < 0$,

$\mathscr{S} = \mathbb{R}$

$$(x-4)^2 \leqslant (-5x+2)^2$$
$$(x-4)^2 - (-5x+2)^2 \leqslant 0$$
$$(x-4+5x-2)(x-4-5x+2) \leqslant 0$$
$$(6x-6)(-4x-2) \leqslant 0$$

Le trinôme est sous forme factorisée. Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 1. Comme $a < 0$ (a $= -24$) :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right] \cup [1\,;+\infty[$