Le cours – 1ère spé : Suites arithmétiques, suites géométriques

Suite arithmétique

Définition par récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r est la **raison** de la suite arithmétique

Prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Expression explicite :

$$u_n = u_0 + nr$$
$$u_n = u_1 + (n-1)r$$
$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Somme de termes :

$$S = nbre\ de\ termes \times \frac{1^{er}\ terme + dernier\ terme}{2}$$

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Variations :

Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante
Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante

Remarque :

Les points de la représentation graphique sont alignés.

Suite géométrique

Définition par récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

q est la **raison** de la suite géométrique

Prouver qu'il s'agit d'une suite géométrique :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Expression explicite :

$$u_n = u_0 \times q^n$$
$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Somme de termes :

$$S = 1^{er}\ terme \times \frac{1 - q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}$$

$$1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Variations :

Pour $u_0 > 0$:
Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante
Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante
Pour $u_0 < 0$:
Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est décroissante
Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est croissante

Remarque :

Si $q < 0$, la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante. Elle alterne entre valeurs négatives et valeurs positives.

Les méthodes – 1ère spé : Suites arithmétiques, suites géométriques

Déterminer la raison à partir de termes connus :

Suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 5$ et $u_7 = 15$. Déterminer la raison de cette suite et calculer u_0.

Solution :
On utilise l'expression explicite $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n = 7$ et $p = 3$:

$u_7 = u_3 + (7-3)r$
$u_7 = u_3 + 4r$
$r = \frac{u_7 - u_3}{4}$
$r = \frac{15-5}{4}$
$r = \frac{5}{2}$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 + \frac{5}{2}n$$

pour $n = 3$, on obtient :

$u_3 = u_0 + \frac{5}{2} \times 3$
$5 = u_0 + \frac{15}{2}$
$u_0 = 5 - \frac{15}{2} = -\frac{5}{2}$

Donc $u_n = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}n$

Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_3 = 5$ et $u_6 = 40$. Déterminer la raison de cette suite et calculer u_0.

Solution :
On utilise l'expression explicite $u_n = u_p \times q^{n-p}$ avec $n = 6$ et $p = 3$:

$u_6 = u_3 \times q^{6-3}$
$u_6 = u_3 \times q^3$
$q^3 = \frac{u_6}{u_3}$
$q^3 = \frac{40}{5}$
$q^3 = 8$
$q = \sqrt[3]{8} = 2$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 \times 2^n$$

pour $n = 3$, on obtient :

$u_3 = u_0 \times 2^3$
$5 = u_0 \times 8$
$u_0 = \frac{5}{8}$

Donc $u_n = \frac{5}{8} \times 2^n$

Forme explicite, variation et somme de termes :

Suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
1) Déterminer l'expression du terme général u_n et calculer le huitième terme de cette suite.
2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{17}$

Solution :
1) (u_n) est la suite arithmétique $u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 2$.
On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$. On a donc $u_n = 2 + 3n$.
Le huitième terme est le terme de rang $n = 7$.
$u_7 = 2 + 3 \times 7 = 23$.

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$. $3 > 0$, donc (u_n) est croissante.

3) On utilise la formule :
$S = nbre\ de\ termes \times \frac{1^{er}\ terme + dernier\ terme}{2}$.
Cela donne :
$S = 18 \times \frac{u_0 + u_{17}}{2} = 18 \times \frac{2+53}{2} = 495$

Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
1) Déterminer l'expression du terme général u_n et calculer le septième terme de cette suite.
2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{17}$

Solution :
1) (u_n) est la suite géométrique $u_{n+1} = 2 \times u_n$ avec $u_0 = 3$.
On utilise la formule $u_n = u_0 \times q^n$. On a donc $u_n = 3 \times 2^n$.
Le septième terme est le terme de rang $n = 6$.
$u_6 = 3 \times 2^6 = 192$.

2) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3 > 0$ et de raison $q = 2 > 1$. Donc (u_n) est croissante.

3) On utilise la formule : $S = 1^{er}\ terme \times \frac{1 - q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}$.
Cela donne :
$S = u_0 \times \frac{1-2^{18}}{1-2} = 3 \times \frac{1-2^{18}}{1-2} = 786429$

Erreurs courantes et astuces diverses:

Attention, 3×2^n **n'est pas égal** à 6^n. C'est une erreur fréquente. Il faut laisser l'écriture $u_n = 3 \times 2^n$ telle quelle.

Exercice type avec suite auxiliaire (première → terminale) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 200$.
1) Calculer u_1 et u_2.
Pour tout entier n, on considère la suite (w_n) définie par : $w_n = u_n - 4000$.
2) Calculer w_0.
3) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison égale à 0,95.
4) Exprimer w_n en fonction de n.
5) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Solution :
1) $u_1 = 0{,}95\,u_0 + 200 = 0{,}95 \times 10000 + 200 = 9700$
$u_2 = 0{,}95\,u_1 + 200 = 0{,}95 \times 9700 + 200 = 9415$

2) $w_n = u_n - 4000$ donc $w_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$

3) Pour démontrer que (w_n) est géométrique, on calcule $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ qui doit être égal à une constante (la raison de la suite géométrique).

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0{,}95\,u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0{,}95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0{,}95\left(u_n - \frac{3800}{0{,}95}\right)}{u_n - 4000} = \frac{0{,}95\,(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0{,}95$$

On a donc $w_{n+1} = 0{,}95w_n$. (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

4) On utilise la formule $w_n = w_0 \times q^n$ comme (w_n) est géométrique. On a donc $w_n = 6000 \times 0{,}95^n$.

5) Enfin, étant donné que $w_n = u_n - 4000$, on a $u_n = w_n + 4000 = 6000 \times 0{,}95^n + 4000$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :