Trois définitions d'une suite :

Définition par récurrence

$$\begin{cases} \text{un terme donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

calcul d'un terme à partir du précédent

exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Définition explicite

$$u_n = f(n)$$

calcul direct de chaque terme

exemple :

$$u_n = 6n + 8$$

Définition avec un algorithme

```
U=2
n=0
for i in range(4):
    U=U+5
    n=n+1
    print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

```
pour n =  1 U =  7
pour n =  2 U =  12
pour n =  3 U =  17
pour n =  4 U =  22
>>>
```

avec une boucle **for** ou **while**

Variations d'une suite :

- La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Étude des variations d'une suite :

Méthode n°1 (à privilégier) :

On compare u_{n+1} et u_n en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Méthode n°2 (quand on a des puissances de n) :

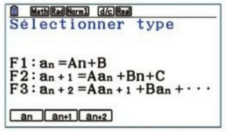
On compare u_{n+1} et u_n en comparant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Méthode n°3 (SEULEMENT pour les suites définies EXPLICITEMENT) :

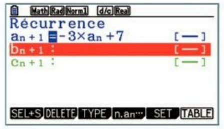
Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction $f(x)$ sur $[0;+\infty[$.

Suites avec la calculatrice :

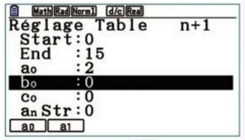
1 Sélectionner le mode **Récurrence**.
Si l'écran obtenu ne permet pas d'exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, appuyer sur F3 pour sélectionner le « **Type** » de suite, puis sur F2 pour sélectionner a_{n+1}.



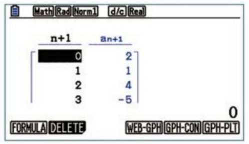
2 Renseigner l'écran comme ci-dessous : a_n est obtenu en appuyant sur la touche F4 pour sélectionner $n \cdot a_n \dots$, puis sur la touche F2. Appuyer sur **EXE**.



3 Accéder au menu **SET** en appuyant sur la touche F5 puis renseigner les indices des premier et dernier termes calculés ainsi que la valeur du premier terme. Appuyer sur **EXE**.



4 Appuyer sur la touche **EXIT** puis F6 pour obtenir le tableau des valeurs des termes de (u_n) :



Calculer des termes :

Suite définie par récurrence

exemple n°1 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

$u_0 = 2$
$u_1 = 2u_0 + 3 = 2\times 2 + 3 = 7$
$u_2 = 2\times 7 + 3 = 17$
$u_3 = 2\times 17 + 3 = 37$
…

exemple n°2 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3n \end{cases}$$

$u_0 = 0$
$u_1 = u_0 + 3\times 0 = 0$
$u_2 = u_1 + 3\times 1 = 0 + 3 = 3$
$u_3 = u_2 + 3\times 2 = 3 + 6 = 9$
…

Suite définie explicitement

exemple n°1 :

$$u_n = 6n + 8,\ n \geq 0$$

$u_0 = 6\times 0 + 8 = 8$
$u_1 = 6\times 1 + 8 = 14$
$u_2 = 6\times 2 + 8 = 20$
…
$u_{50} = 6\times 50 + 8 = 308$
…

exemple n°2 :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$
$$u_n = f(n),\ n \geq 0$$

$u_0 = f(0) = 3$
$u_1 = f(1) = \dfrac{4}{2} = 2$
$u_2 = f(2) = \dfrac{5}{3}$
…

Suite définie avec un algorithme

exemple :

```
U=2
n=0
for i in range(10):
    U=U+5
    n=n+1
print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

$u_0 = 2$
$u_1 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7$
$u_2 = u_1 + 5 = 7 + 5 = 12$
$u_3 = u_2 + 5 = 12 + 5 = 17$
…

Étude de la monotonie d'une suite :

exemple n°1 :

Soit $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$, $n \geq 0$. Etudier les variations de la suite (u_n).

Solution :
Avec la méthode n°1 :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+2}{n+1+1} - \frac{n+2}{n+1}$$
$$= \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1}$$
$$= \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \frac{(n^2+n+3n+3)-(n^2+4n+4)}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \leq 0$$

On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et ainsi $u_{n+1} \leq u_n$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

exemple n°2 :

Soit $u_n = 2^n$, $n \geq 0$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution :
Avec la méthode n°2 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2 \geq 1$$

On a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et ainsi $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) est donc croissante.

exemple n°3 :

Soit $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$, $n \geq 0$. Etudier les variations de la suite (u_n).

Solution :
Avec la méthode n°3 :

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{8x-4}{x+1}$ définie sur $[0;+\infty[$.

f est de la forme $\dfrac{U}{V}$.

$$f'(x) = \frac{8(x+1)-(8x-4)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{12}{(x+1)^2} \geq 0$$

f est croissante sur $[0;+\infty[$.
On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

<u>Erreurs courantes et astuces diverses:</u>

Il ne faut **PAS** étudier les variations d'une suite **en calculant les premiers termes**. Ceci n'est pas une démonstration mais juste une conjecture !

On ne fait surtout **PAS de tableau de variations** pour une suite. Les flèches des tableaux de variations indiquent la continuité (les suites sont discontinues).

Décalage des indices : $u_{n+1} = 2u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = 2u_{n-1} + 3 \Leftrightarrow u_{n+8} = 2u_{n+7} + 3$. De même, $u_n = 5n + 9 \Leftrightarrow u_{n+1} = 5(n+1) + 9$

Déterminer un seuil :

Soit $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$, $n \geq 0$. Nous savons que la suite (u_n) est décroissante, que $u_0 = 2$ et que la limite de (u_n) est 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Voici un algorithme écrit en Python :

```python
def seuil(a):
    n=0
    U=2
    while U > a:
        n=n+1
        U=(n+2)/(n+1)
    return n
```

1) Que permet de faire ce programme ?
2) Que renvoie seuil(1,055) ?

Solution :
1) Ce programme permet de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq a$, où a est un nombre choisi par l'utilisateur. En effet, la boucle while continuera tant que `U > a`. La boucle sera « brisée » dès que $u_n \leq a$ et le programme renverra la valeur de n correspondante.

2) Chercher la valeur renvoyée par seuil(1,055) revient à chercher pour quelle valeur de n on a $u_n \leq 1{,}055$. On cherche cette valeur en utilisant le **tableau de valeur du mode récurrence** de la calculatrice (voir cours).
On obtient :
$u_{17} \approx 1{,}0555$ et $u_{18} \approx 1{,}0526$
Donc seuil(1,055) renverra la valeur 18.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :