

**Polynôme du second degré :**

La fonction qui, à tout réel  $x$  associe  $ax^2 + bx + c$  où  $a$  est un réel non nul, est une **fonction polynôme du second degré**. Les réels  $a, b$  et  $c$  sont les **coefficients de ce polynôme**. Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré. Les **racines** de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**Forme factorisée :**

Si  $f$  est une fonction polynôme du second degré **ayant deux racines distinctes**  $x_1$  et  $x_2$ , alors  $f$  peut s'écrire sous **forme factorisée** :  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ . On a alors  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  et  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ .

**Forme canonique :**

Pour tout polynôme  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  
 $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ .  
 $a(x-\alpha)^2 + \beta$  est la **forme canonique** du polynôme  $ax^2 + bx + c$ . On a  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .  
 La représentation graphique de  $f$  est une **parabole** dont le sommet  $S$  a pour coordonnées  $S(\alpha; \beta)$ . La droite d'équation  $x = \alpha$  est un **axe de symétrie** de la parabole.

**Résolution de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  :**

Le réel  $b^2 - 4ac$ , noté  $\Delta$ , est appelé **discriminant** du polynôme  $ax^2 + bx + c$ .

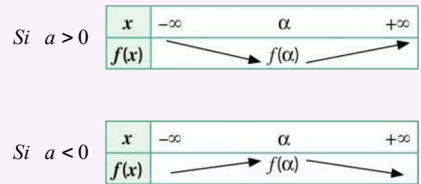
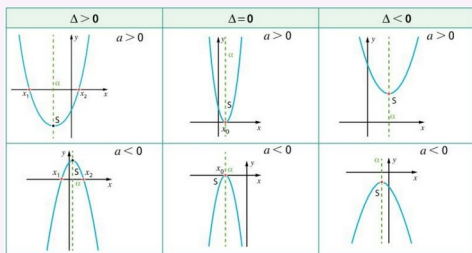
Si  $\Delta > 0$ , l'équation du second degré a **deux solutions** distinctes :  
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$   
 et la forme factorisée est  $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Si  $\Delta = 0$ , l'équation du second degré a **une solution** :  
 $x_0 = -\frac{b}{2a}$   
 et la forme factorisée est  $ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2$

Si  $\Delta < 0$ , l'équation du second degré n'a **pas de solution réelle**. Le polynôme ne peut pas être factorisé.

**Signe et variations du polynôme :**

Signe de $\Delta$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																								
Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$	<table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td>0</td><td>signe de <math>a</math></td><td>signe de <math>a</math></td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	signe de $a$	<table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td>0</td><td>signe de <math>a</math></td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	<table border="1"> <tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr><td><math>f(x)</math></td><td colspan="2">signe de <math>a</math></td></tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	signe de $a$	
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$																							
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$	signe de $a$																							
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$																								
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$																								
$x$	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	signe de $a$																										



**Écrire sous forme canonique un polynôme du second degré :**

Déterminer la forme canonique du trinôme  $f(x) = -x^2 + 2x - 5$ .

**Solutions :**

**Méthode n°1 :**

$f$  est une fonction polynôme de degré 2, de coefficients  $a = -1, b = 2$  et  $c = -5$ . Son écriture canonique est  $-(x-\alpha)^2 + \beta$  avec :  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$  et  $\beta = f(\alpha) = f(1) = -4$ .

Donc pour tout  $x$  réel,  $f(x) = -(x-1)^2 - 4$ .

**Méthode n°2 :**

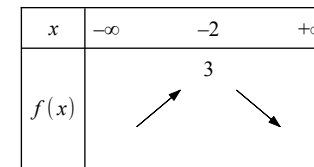
On factorise  $f$  par  $a = -1$  :  $f(x) = -(x^2 - 2x + 5)$ . Puis en remarquant que  $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ , on obtient :  
 $f(x) = -[(x-1)^2 - 1 + 5] = -(x-1)^2 - 4$ .

**Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2 :**

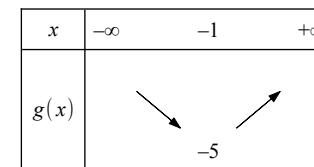
Étudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 3 - (x+2)^2$  et  $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$

**Solutions :**

Pour  $f$ , on reconnaît la forme canonique avec  $a = -1, \alpha = -2$  et  $\beta = 3$ . Le sommet de la parabole est donc  $S(-2; 3)$  et étant donné le signe de  $a, f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -2]$  et strictement décroissante sur  $]-2; +\infty[$ .



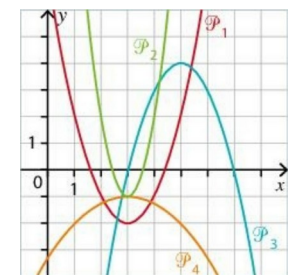
Pour  $g$ , on a  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$  et  $\beta = g(\alpha) = g(-1) = -5$ . Le sommet de la parabole est donc  $S(-1; -5)$  et étant donné le signe de  $a, g$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -1]$  et strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$ .



**Identifier la forme d'une fonction polynôme de degré 2 :**

Sans calculatrice, associer chaque fonction polynôme ci-dessous à la parabole qui la représente.

$f(x) = -1 + 3(x-3)^2, \quad g(x) = -1 - 0,25(x-3)^2$   
 $h(x) = x^2 - 6x + 7, \quad i(x) = (x-3)(7-x)$



**Solutions :**

On peut écrire la fonction  $i : i(x) = -(x-3)(x-7)$ . C'est une forme factorisée. Les racines de  $i$  sont donc 3 et 7. Sa représentation graphique coupe donc l'axe des abscisses aux points  $(3; 0)$  et  $(7; 0)$  : il s'agit de  $\mathcal{P}_3$ .  
 $f$  est sous forme canonique. Elle admet un minimum (car  $a > 0$ ) pour  $x = 3$  qui vaut  $-1$ . Sa courbe représentative est  $\mathcal{P}_2$ .  
 $g$  est sous forme canonique. Elle admet un maximum (car  $a < 0$ ) pour  $x = 3$  qui vaut  $-1$ . Sa courbe représentative est  $\mathcal{P}_4$ .  
 Par élimination, la courbe représentative de  $h$  est  $\mathcal{P}_1$ .

**Résoudre une équation du second degré :**

Résoudre les équations suivantes :

1)  $x^2 - 3x + 1 = 0$       2)  $x^2 + x + 1 = 0$       3)  $0,3x^2 - 3x + 7,5 = 0$

**Solutions :**

1) On calcule le discriminant  $\Delta$ . On a  $a = 1, b = -3$  et  $c = 1$ .  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$   
 $\Delta > 0$ , donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

2) On calcule le discriminant  $\Delta$ . On a  $a = 1, b = 1$  et  $c = 1$ .  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$   
 $\Delta < 0$ , donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

3) On calcule le discriminant  $\Delta$ . On a  $a = 0,3, b = -3$  et  $c = 7,5$ .  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 0,3 \times 7,5 = 0$   
 $\Delta = 0$ , donc l'équation admet une unique solution réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 0,3} = \frac{3}{0,6} = 5.$$

**Factoriser un trinôme du second degré :**

Déterminer les racines éventuelles et en déduire, si possible, une expression factorisée des trinômes suivants.

1)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$       2)  $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$       3)  $h(x) = 18x^2 - 12x + 2$

**Solutions :**

1)  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -20$   
 $\Delta < 0$ , donc  $f$  ne peut pas être factorisé.

2)  $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49$   
 $\Delta > 0$ , donc  $g$  possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2 \times (-2)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{2}$$

On peut donc factoriser  $g : g(x) = -2 \left( x - \left( -\frac{1}{2} \right) \right) (x - 3) = (-2x - 1)(x - 3)$

3)  $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 18 \times 2 = 0$   
 $\Delta = 0$ , donc  $h$  possède une unique racine réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times 18} = \frac{1}{3}.$$

On peut donc factoriser  $h : h(x) = 18 \left( x - \frac{1}{3} \right)^2$ .

**Détecter les racines d'un polynôme du second degré :**

Soit le polynôme  $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$ . Trouver une racine évidente de  $f(x)$  et en déduire la deuxième racine.

**Solutions :**

Pour  $x = 1$ , on a  $f(1) = 5 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1 = 0$ , donc 1 est une racine évidente. Soit  $x_2$  la deuxième racine.

$$1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{5}, \text{ donc } x_2 = -\frac{1}{5}.$$

**Étudier le signe d'un trinôme du second degré :**

Étudier le signe des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par : 1)  $f(x) = -3x^2 - 5x + 2$  et 2)  $g(x) = 2x^2 - 4x + 2,4$

**Solutions :**

1) Pour  $f, \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 49$ .

$\Delta > 0$ , donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 7}{2 \times (-3)} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 7}{2 \times (-3)} = -2.$$

$a < 0$ , on obtient donc le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

2) Pour  $g, \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2,4 = -3,2$ .

$\Delta < 0$ , donc le trinôme est du signe de  $a$  sur  $\mathbb{R}$ .

On obtient donc le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		$+$

**Résoudre des inéquations :**

Résoudre les inéquations suivantes :

1)  $(2x + 1)(3 - x) > 0$       2)  $-2x^2 + 5x \leq 4$       3)  $(x - 4)^2 \leq (-5x + 2)^2$

**Solutions :**

$$(2x + 1)(3 - x) > 0$$

Le trinôme est sous forme

factorisée. Les racines sont  $-\frac{1}{2}$  et

3. Comme  $a < 0$  ( $a = -2$ ) :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$		
		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\frac{1}{2}; 3 \right[$$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 5x &\leq 4 \\ -2x^2 + 5x - 4 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = -7$$

Le trinôme est du signe de  $a$  sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $a < 0$ ,

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &\leq (-5x+2)^2 \\ (x-4)^2 - (-5x+2)^2 &\leq 0 \\ (x-4+5x-2)(x-4-5x+2) &\leq 0 \\ (6x-6)(-4x-2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Le trinôme est sous forme factorisée. Les racines sont  $-\frac{1}{2}$  et 1. Comme  $a < 0$  ( $a = -24$ ) :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$		
		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup [1; +\infty[$$

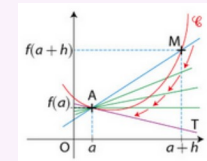
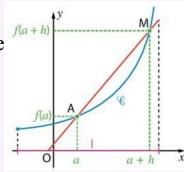
## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Dérivation locale

### Nombre dérivé :

**Coefficient directeur** d'une droite  $(AB)$  :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

**Taux de variation entre  $a$  et  $b$**  :  $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Il s'agit de la **pen**te de la **sécante** à la courbe entre les points d'abscisses  $a$  et  $b$ .

**Taux de variation entre  $a$  et  $a+h$**  :  $\tau = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . Il s'agit de la **pen**te de  $(AM)$ .



**Nombre dérivé en  $a$  se note  $f'(a)$**  :

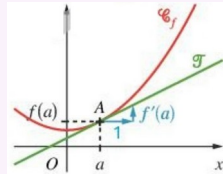
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ .

### Équation de tangente :

**Équation de la tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Dérivation locale

### Calculer le taux de variation et la pente d'une sécante :

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 - x$ .

1) Calculer la pente de la sécante à la courbe de  $f$  entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4.

2) Calculer le taux de variation de  $f$  entre 2 et  $2+h$ .

#### Solutions :

1) La pente de la sécante à la courbe de  $f$  entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4 est égale à  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ .

Or,  $f(4) = 2 \times 4^2 - 4 = 28$  et  $f(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1$ .

Ainsi,  $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{28 - 1}{3} = 9$ . La pente recherchée est donc égale à 9.

2) Le taux de variation de  $f$  entre 2 et  $2+h$  est :  $\tau = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ .

On a  $f(2) = 2 \times 2^2 - 2 = 6$  et  $f(2+h) = 2 \times (2+h)^2 - (2+h) = 2 \times (4 + 4h + h^2) - (2+h) = 8 + 8h + 2h^2 - 2 - h = 2h^2 + 7h + 6$

Ainsi,  $\tau = \frac{2h^2 + 7h + 6 - 6}{h} = \frac{2h^2 + 7h}{h} = \frac{h(2h + 7)}{h} = 2h + 7$

Le taux de variation de  $f$  entre 2 et  $2+h$  est donc  $2h + 7$ .

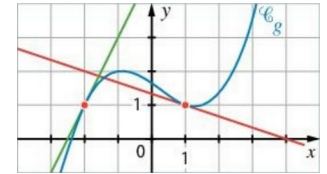
### Déterminer graphiquement un nombre dérivé :

On a tracé ci-contre la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  d'une fonction  $g$  ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.

1) Déterminer graphiquement le nombre dérivé de  $g$  en -2.

2) Déterminer graphiquement  $g'(1)$ .

3) Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1.



#### Solution :

1) Le nombre dérivé de  $g$  en -2,  $g'(-2)$ , est la pente de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse -2. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (-2 ; 1) et (-1 ; 3) appartiennent à cette tangente (droite verte). On a donc :

$$g'(-2) = \frac{3 - 1}{-1 - (-2)} = 2.$$

2)  $g'(1)$  est la pente de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4 ; 0) appartiennent à cette tangente (droite rouge). On a donc :

$$g'(1) = \frac{0 - 1}{4 - 1} = -\frac{1}{3}.$$

3) L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1 est donnée par :  $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ . Par lecture graphique,  $g(1) = 1$ , et nous savons déjà que  $g'(1) = -\frac{1}{3}$ . Nous obtenons alors :

$$y = -\frac{1}{3}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1 est donc  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ .

### Déterminer l'équation d'une tangente :

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

1) Calculer  $f'(0)$ .

2) Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

#### Solution :

1) Le taux de variation de  $f$  entre 0 et  $0+h$  est :

$$\tau = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} - \frac{0+1}{0-1}}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + 1}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + \frac{h-1}{h-1}}{h} = \frac{\frac{2h}{h-1}}{h} = \frac{2h}{h-1} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{h-1}$$

On a donc  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h-1} = -2$

2) L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est donnée par :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ .

Nous avons  $f(0) = -1$  et  $f'(0) = -2$ , d'où  $y = -2(x - 0) - 1 = -2x - 1$

L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est donc  $y = -2x - 1$ .

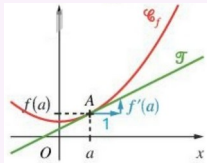
## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : fonctions dérivées

### Équation de tangente :

Équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$f'(a)$  correspond au **coefficient directeur de la tangente**.



### Dérivation des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Ensemble de définition	Fonction dérivée $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

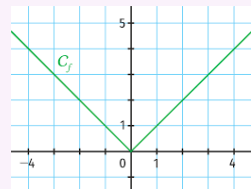
### Opérations sur les fonctions dérivées :

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une <b>somme</b>	$u + v$	$u' + v'$
Dérivée d'un produit par une constante	$ku$	$ku'$
Dérivée d'un <b>produit</b>	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Dérivée d'un <b>inverse</b>	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un <b>quotient</b>	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Composée exponentielle	$e^u$	$u' \times e^u$
<b>Composée</b>	$\frac{g(u)}{g(ax+b)}$	$\frac{u' \times g'(u)}{a \times g'(ax+b)}$

### Fonction valeur absolue :

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x & , \text{si } x \leq 0 \\ x & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction valeur absolue **n'est pas dérivable en 0**.



## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Fonctions dérivées

### Étudier la dérivabilité d'une fonction :

Soit  $a$  un nombre réel quelconque.

A l'aide du taux de variation, montrer que la fonction  $f(x) = x^2$  est dérivable en  $a$  puis retrouver l'expression de la dérivée de la fonction carré.

#### Solutions :

Pour étudier la dérivabilité de  $f$  en  $a$ , il faut tout d'abord s'intéresser aux taux de variation de  $f$  en  $a$  :

$$\tau_a = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

Lorsque  $h$  devient très proche de zéro, cette quantité se rapproche de  $2a$  qui est un nombre fini. La fonction est donc dérivable en  $a$  et on a  $f'(a) = 2a$ .

### Déterminer la fonction dérivée :

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1)  $f(x) = 3x + 5$     2)  $f(x) = \sqrt{x}$     3)  $f(x) = x^7$     4)  $f(x) = \sqrt{2}$     5)  $f(x) = -3 + 2x$

#### Solutions :

1)  $f'(x) = 3$     2)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$     3)  $f'(x) = 7x^6$     4)  $f'(x) = 0$     5)  $f'(x) = 2$

### Déterminer la dérivabilité et la fonction dérivée :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) elle est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

1)  $f(x) = 7x^2 - 5x$     2)  $g(x) = \frac{3}{x}$     3)  $h(x) = \frac{3x+1}{2x^2+5}$     4)  $m(x) = \sqrt{x}(6x^3-2)$

#### Solutions :

1)  $f$  est une fonction polynôme donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $f' = u' + v'$ .  $u(x) = 7x^2$ , donc  $u'(x) = 14x$  et  $v(x) = -5x$ , donc  $v'(x) = -5$ . On en déduit  $f'(x) = 14x - 5$ .

2)  $g$  est de la forme  $ku$  avec  $k=3$  et  $u(x) = \frac{1}{x}$ . Donc  $g$  est dérivable sur  $] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ .

$$g'(x) = k u'(x) = 3 \times \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{3}{x^2}$$

3)  $h$  est un quotient de deux fonctions  $u(x) = 3x+1$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $v(x) = 2x^2+5$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et, pour tout réel  $x$ ,  $v(x) \geq 5 > 0$ , donc  $v$  ne s'annule pas. La fonction  $h$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ . On obtient donc :

$$h' = \frac{3 \times (2x^2+5) - (3x+1) \times 4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15 - (12x^2+4x)}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15-12x^2-4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{-6x^2-4x+15}{(2x^2+5)^2}$$

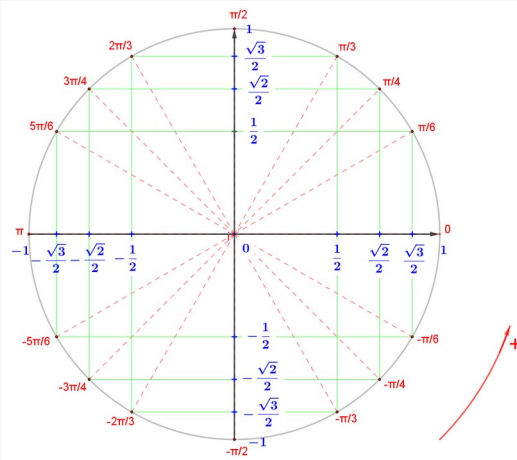
4)  $h$  est le produit de deux fonctions  $u(x) = \sqrt{x}$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $v(x) = 6x^3-2$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $m$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , et  $m' = u'v + uv'$ . On obtient donc :

$$m' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (6x^3-2) + \sqrt{x} \times 18x^2 = \frac{3x^3-1}{\sqrt{x}} + \frac{x \times 18x^2}{\sqrt{x}} = \frac{21x^3-1}{\sqrt{x}}$$

## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Trigonométrie

### Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1, orienté dans le **sens inverse des aiguilles d'un montre**.



$x$ (en degrés)	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$x$ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$

Angle $\widehat{IOM}$ (en degrés)	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
réel $a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

### Propriétés du cosinus et du sinus

$$-1 \leq \cos(a) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin(a) \leq 1$$

$$\cos(a + 2k\pi) = \cos(a) \text{ et } \sin(a + 2k\pi) = \sin(a) \text{ pour } k \text{ entier}$$

$$(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1 \text{ qui peut s'écrire } \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

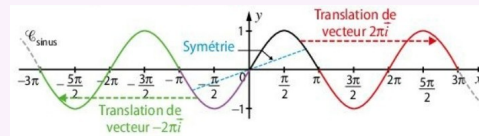
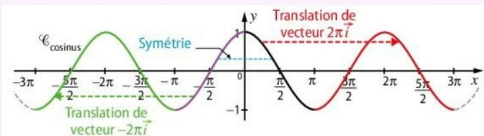
### Les fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période  $2\pi$  :  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$  et  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ .

La fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire** :  $\cos(-x) = \cos(x)$  et  $\sin(-x) = -\sin(x)$ .

$x$	0	$\pi$
$\cos(x)$	1	-1

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin(x)$	0	1	0



## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Trigonométrie

### Convertir des angles en radian (déterminer des longueurs d'arc)

Convertir en radian les angles de mesures suivantes données en degré :

- 1)  $30^\circ$       2)  $0^\circ$       3)  $150^\circ$       4)  $210^\circ$       5)  $225^\circ$

#### Solutions :

On utilise un tableau de proportionnalité sachant que  $360^\circ$  correspond à  $2\pi$  en radian.

Angle en degré	360	30	0	150	210	225
Angle en radian	$2\pi$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

### Convertir des angles en degré

Convertir en degré les angles de mesures suivantes données en radian :

- 1)  $\frac{3\pi}{2}$       2)  $\frac{2\pi}{5}$       3)  $\frac{3\pi}{4}$       4)  $\frac{7\pi}{3}$       5)  $\frac{\pi}{8}$

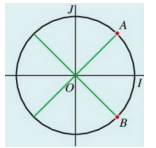
#### Solutions :

On utilise un tableau de proportionnalité.

Angle en radian	$2\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{\pi}{8}$
Angle en degré	360	270	72	135	75	22,5

### Se repérer sur le cercle trigonométrique

Le cercle ci-contre est le cercle trigonométrique partagé en huit arcs de même longueur. Pour chacun des points  $A$  et  $B$  du cercle, donner **trois** réels dont il est le point-image.



#### Solutions :

Pour aller de  $I$  à  $A$  dans le sens trigonométrique, on parcourt un arc de longueur un huitième de la longueur du cercle.  $A$  est donc le point-image du nombre  $\frac{\pi}{4}$ . Pour déterminer d'autres réels dont  $A$  est le point-image, il suffit d'ajouter ou de

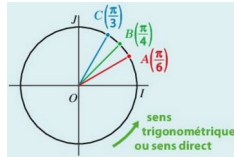
retrancher des multiples de  $2\pi$  :  $\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$  ;  $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ .

De même,  $B$  est le point-image des nombres  $-\frac{\pi}{4}$  ;  $-\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4}$  ;  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

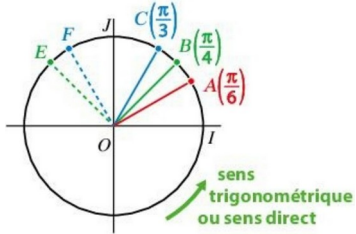
### Placer des points sur le cercle trigonométrique

On a placé sur le cercle trigonométrique ci-contre trois points-images de trois nombres.

Reproduire le cercle et placer les points  $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$  et  $F\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ .



#### Solutions :



### Utiliser les propriétés du cosinus et du sinus

Déterminer le signe des nombres réels suivants où  $a \in \mathbb{R}$  :

- 1)  $1 - \cos(a)$                       2)  $-\sin(a) - 1$

#### Solutions :

- 1) On sait que  $-1 \leq \cos(a) \leq 1$  d'où  $1 \geq -\cos(a) \geq -1$  et  $2 \geq 1 - \cos(a) \geq 0$ . On a donc  $1 - \cos(a) \geq 0$ .  
 2) On sait que  $-1 \leq \sin(a) \leq 1$  d'où  $1 \geq -\sin(a) \geq -1$  et  $0 \geq -\sin(a) - 1 \geq -2$ . On a donc  $-\sin(a) - 1 \leq 0$ .

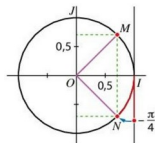
### Utiliser les valeurs de sinus et cosinus

- 1) Déterminer les valeurs exactes de cosinus et sinus de  $-\frac{\pi}{4}$ .  
 2) Calculer  $A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

#### Solutions :

- 1) Sur le cercle trigonométrique ci-contre, le point-image de  $-\frac{\pi}{4}$  est le point  $N$ .

On a donc  $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



- 2)  $A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$                        $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ .

### Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique

Démontrer que la fonction  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  est périodique de période  $2\pi$ .

#### Solutions :

Pour tout réel  $x$ , on calcule  $f(x+2\pi)$  :

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin(x) + \cos(x) = f(x).$$

La fonction  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .

### Montrer qu'une fonction est paire ou impaire

On considère la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \sin(x) + x$ .

- 1) Montrer que la fonction est impaire.  
 2) Qu'en déduit-on pour sa courbe représentative dans un repère orthonormé ?

#### Solutions :

- 1) On calcule  $f(-x) = \sin(-x) - x = -\sin(x) - x = -(\sin(x) + x) = -f(x)$ . La fonction  $f$  est impaire.  
 2) La courbe représentative de la fonction  $f$  est symétrique par rapport à l'origine  $O$  du repère.

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Trois définitions d'une suite :

Définition par récurrence

$$\begin{cases} \text{un terme donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

calcul d'un terme à partir du précédent

exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Définition explicite

$$u_n = f(n)$$

calcul direct de chaque terme

exemple :

$$u_n = 6n + 8$$

Définition avec un algorithme

```
U=2
n=0
for i in range(4):
    U=U+5
    n=n+1
    print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

```
pour n = 1 U = 7
pour n = 2 U = 12
pour n = 3 U = 17
pour n = 4 U = 22
>>>
```

avec une boucle for ou while

Variations d'une suite :

- La suite  $(u_n)$  est **croissante** à partir du rang  $p$  signifie que pour  $n \geq p$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n$ .
- La suite  $(u_n)$  est **décroissante** à partir du rang  $p$  signifie que pour  $n \geq p$ , on a  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Étude des variations d'une suite :

Méthode n°1 (à privilégier) :

On compare  $u_{n+1}$  et  $u_n$  en étudiant le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

Méthode n°2 (quand on a des puissances de n) :

On compare  $u_{n+1}$  et  $u_n$  en comparant  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

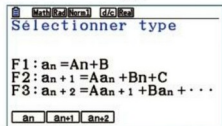
Méthode n°3 (SEULEMENT pour les suites définies EXPLICITEMENT) :

Si  $u_n = f(n)$ , on étudie les variations de la fonction  $f(x)$  sur  $[0; +\infty[$ .

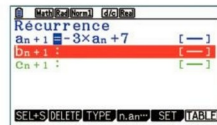
Suites avec la calculatrice :

1 Sélectionner le mode Récurrence.

Si l'écran obtenu ne permet pas d'exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ , appuyer sur  $\text{F3}$  pour sélectionner le « Type » de suite, puis sur  $\text{F2}$  pour sélectionner  $a_{n+1}$ .

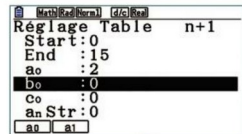


2 Renseigner l'écran comme ci-dessous :  $a_n$  est obtenu en appuyant sur la touche  $\text{F2}$  pour sélectionner  $n \cdot a_n \dots$ , puis sur la touche  $\text{F2}$ . Appuyer sur  $\text{EXE}$ .



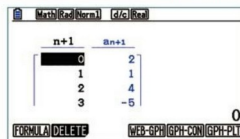
3 Accéder au menu

SET en appuyant sur la touche  $\text{F5}$  puis renseigner les indices des premier et dernier termes calculés ainsi que la valeur du premier terme. Appuyer sur  $\text{EXE}$ .



4 Appuyer sur la

touche  $\text{EXIT}$  puis  $\text{F6}$  pour obtenir le tableau des valeurs des termes de  $(u_n)$  :



Calculer des termes :

Suite définie par récurrence

exemple n°1 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$u_2 = 2 \times 7 + 3 = 17$$

$$u_3 = 2 \times 17 + 3 = 37$$

...

exemple n°2 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3n \end{cases}$$

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = u_0 + 3 \times 0 = 0$$

$$u_2 = u_1 + 3 \times 1 = 0 + 3 = 3$$

$$u_3 = u_2 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9$$

...

Suite définie explicitement

exemple n°1 :

$$u_n = 6n + 8, n \geq 0$$

$$u_0 = 6 \times 0 + 8 = 8$$

$$u_1 = 6 \times 1 + 8 = 14$$

$$u_2 = 6 \times 2 + 8 = 20$$

...

$$u_{50} = 6 \times 50 + 8 = 308$$

...

exemple n°2 :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

$$u_n = f(n), n \geq 0$$

$$u_0 = f(0) = 3$$

$$u_1 = f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_2 = f(2) = \frac{5}{3}$$

...

Suite définie avec un algorithme

exemple :

```
U=2
n=0
for i in range(10):
    U=U+5
    n=n+1
    print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$u_2 = u_1 + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$u_3 = u_2 + 5 = 12 + 5 = 17$$

...

Étude de la monotonie d'une suite :

exemple n°1 :

Soit  $u_n = \frac{n+2}{n+1}, n \geq 0$ . Etudier les variations de la suite  $(u_n)$ .

Solution :

Avec la méthode n°1 :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+2}{n+1+1} - \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(n^2+n+3n+3) - (n^2+4n+4)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \leq 0$$

On a donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  et ainsi  $u_{n+1} \leq u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

exemple n°2 :

Soit  $u_n = 2^n, n \geq 0$ . Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Solution :

Avec la méthode n°2 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2 \geq 1$$

On a donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  et ainsi

$$u_{n+1} \geq u_n$$

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

exemple n°3 :

Soit  $u_n = \frac{8n-4}{n+1}, n \geq 0$ . Etudier les variations de la suite  $(u_n)$ .

Solution :

Avec la méthode n°3 :

$$\text{Soit la fonction } f(x) = \frac{8x-4}{x+1}$$

définie sur  $[0; +\infty[$ .

$f$  est de la forme  $\frac{U}{V}$ .

$$f'(x) = \frac{8(x+1) - (8x-4)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{12}{(x+1)^2} \geq 0$$

$f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

Erreurs courantes et astuces diverses :

Il ne faut PAS étudier les variations d'une suite en calculant les premiers termes. Ceci n'est pas une démonstration mais juste une conjecture !

On ne fait surtout PAS de tableau de variations pour une suite. Les flèches des tableaux de variations indiquent la continuité (les suites sont discontinues).

Décalage des indices :  $u_{n+1} = 2u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = 2u_{n-1} + 3 \Leftrightarrow u_{n+8} = 2u_{n+7} + 3$ . De même,  $u_n = 5n + 9 \Leftrightarrow u_{n+1} = 5(n+1) + 9$

### Déterminer un seuil :

Soit  $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ ,  $n \geq 0$ . Nous savons que la suite  $(u_n)$  est décroissante, que  $u_0 = 2$  et que la limite de  $(u_n)$  est 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Voici un algorithme écrit en Python :

```
def seuil(a):  
    n=0  
    U=2  
    while U > a:  
        n=n+1  
        U=(n+2)/(n+1)  
    return n
```

- 1) Que permet de faire ce programme ?
- 2) Que renvoie seuil(1,055) ?

### Solution :

1) Ce programme permet de déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \leq a$ , où  $a$  est un nombre choisi par l'utilisateur. En effet, la boucle while continuera tant que  $U > a$ . La boucle sera « brisée » dès que  $u_n \leq a$  et le programme renverra la valeur de  $n$  correspondante.

2) Chercher la valeur renvoyée par seuil(1,055) revient à chercher pour quelle valeur de  $n$  on a  $u_n \leq 1,055$ . On cherche cette valeur en utilisant le **tableau de valeur du mode récurrence** de la calculatrice (voir cours).

On obtient :

$$u_{17} \approx 1,0555 \text{ et } u_{18} \approx 1,0526$$

Donc seuil(1,055) renverra la valeur 18.

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

**Suite arithmétique**

**Définition par récurrence :**

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$r$  est la **raison** de la suite arithmétique

**Prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique :**

$$u_{n+1} - u_n = r$$

**Expression explicite :**

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

**Somme de termes :**

$$S = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Variations :**

Si  $r > 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante  
 Si  $r < 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante

**Remarque :**

Les points de la représentation graphique sont alignés.

**Suite géométrique**

**Définition par récurrence :**

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

$q$  est la **raison** de la suite géométrique

**Prouver qu'il s'agit d'une suite géométrique :**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

**Expression explicite :**

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

**Somme de termes :**

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Variations :**

Pour  $u_0 > 0$  :  
 Si  $q > 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante  
 Si  $0 < q < 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante  
 Pour  $u_0 < 0$  :  
 Si  $q > 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante  
 Si  $0 < q < 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante

**Remarque :**

Si  $q < 0$ , la suite  $(u_n)$  n'est ni croissante, ni décroissante. Elle alterne entre valeurs négatives et valeurs positives.

**Déterminer la raison à partir de termes connus :**

**Suite arithmétique**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique telle que  $u_3 = 5$  et  $u_7 = 15$ . Déterminer la raison de cette suite et calculer  $u_0$ .

**Solution :**

On utilise l'expression explicite  $u_n = u_p + (n-p)r$  avec  $n = 7$  et  $p = 3$  :

$$u_7 = u_3 + (7-3)r$$

$$u_7 = u_3 + 4r$$

$$r = \frac{u_7 - u_3}{4}$$

$$r = \frac{15 - 5}{4}$$

$$r = \frac{5}{2}$$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 + \frac{5}{2}n$$

pour  $n = 3$ , on obtient :

$$u_3 = u_0 + \frac{5}{2} \times 3$$

$$5 = u_0 + \frac{15}{2}$$

$$u_0 = 5 - \frac{15}{2} = -\frac{5}{2}$$

Donc  $u_n = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}n$

**Suite géométrique**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique telle que  $u_3 = 5$  et  $u_6 = 40$ . Déterminer la raison de cette suite et calculer  $u_0$ .

**Solution :**

On utilise l'expression explicite  $u_n = u_p \times q^{n-p}$  avec  $n = 6$  et  $p = 3$  :

$$u_6 = u_3 \times q^{6-3}$$

$$u_6 = u_3 \times q^3$$

$$q^3 = \frac{u_6}{u_3}$$

$$q^3 = \frac{40}{5}$$

$$q^3 = 8$$

$$q = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 \times 2^n$$

pour  $n = 3$ , on obtient :

$$u_3 = u_0 \times 2^3$$

$$5 = u_0 \times 8$$

$$u_0 = \frac{5}{8}$$

Donc  $u_n = \frac{5}{8} \times 2^n$

**Forme explicite, variation et somme de termes :**

**Suite arithmétique**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ .

- Déterminer l'expression du terme général  $u_n$  et calculer le huitième terme de cette suite.
- Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- Calculer la somme  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17}$

**Solution :**

1)  $(u_n)$  est la suite arithmétique  $u_{n+1} = u_n + 3$  avec  $u_0 = 2$ . On utilise la formule  $u_n = u_0 + nr$ . On a donc  $u_n = 2 + 3n$ . Le huitième terme est le terme de rang  $n = 7$ .  
 $u_7 = 2 + 3 \times 7 = 23$ .

2)  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 3$ .  $3 > 0$ , donc  $(u_n)$  est croissante.

3) On utilise la formule :

$$S = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Cela donne :

$$S = 18 \times \frac{u_0 + u_{17}}{2} = 18 \times \frac{2 + 53}{2} = 495$$

**Suite géométrique**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison  $q = 2$ .

- Déterminer l'expression du terme général  $u_n$  et calculer le septième terme de cette suite.
- Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- Calculer la somme  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17}$

**Solution :**

1)  $(u_n)$  est la suite géométrique  $u_{n+1} = 2 \times u_n$  avec  $u_0 = 3$ . On utilise la formule  $u_n = u_0 \times q^n$ . On a donc  $u_n = 3 \times 2^n$ . Le septième terme est le terme de rang  $n = 6$ .  
 $u_6 = 3 \times 2^6 = 192$ .

2)  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3 > 0$  et de raison  $q = 2 > 1$ . Donc  $(u_n)$  est croissante.

3) On utilise la formule :  $S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$ .

Cela donne :

$$S = u_0 \times \frac{1 - 2^{18}}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 2^{18}}{1 - 2} = 786429$$

**Erreurs courantes et astuces diverses:**

Attention,  $3 \times 2^n$  n'est pas égal à  $6^n$ . C'est une erreur fréquente. Il faut laisser l'écriture  $u_n = 3 \times 2^n$  telle quelle.

**Exercice type avec suite auxiliaire (première → terminale) :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10000$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$ .

1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

Pour tout entier  $n$ , on considère la suite  $(w_n)$  définie par :  $w_n = u_n - 4000$ .

2) Calculer  $w_0$ .

3) **Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95.**

4) Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

5) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Solution :**

1)  $u_1 = 0,95u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9700$

$u_2 = 0,95u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9415$

2)  $w_n = u_n - 4000$  donc  $w_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$

3) Pour démontrer que  $(w_n)$  est géométrique, on calcule  $\frac{w_{n+1}}{w_n}$  qui doit être égal à une constante (la raison de la suite géométrique).

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95$$

On a donc  $w_{n+1} = 0,95w_n$ .  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95.

4) On utilise la formule  $w_n = w_0 \times q^n$  comme  $(w_n)$  est géométrique. On a donc  $w_n = 6000 \times 0,95^n$ .

5) Enfin, étant donné que  $w_n = u_n - 4000$ , on a  $u_n = w_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

# Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Application dérivation

Prérequis : Dérivation locale, fonctions dérivées

## Variations :

Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  si et seulement si,  $f'(x) \geq 0$  sur  $I$ .

$f$  est **décroissante** sur  $I$  si et seulement si,  $f'(x) \leq 0$  sur  $I$ .

$f$  est **constante** sur  $I$  si et seulement si,  $f'(x) = 0$  sur  $I$ .

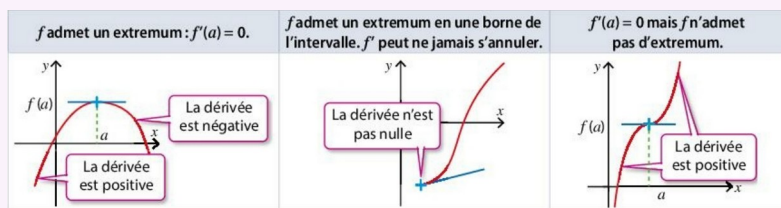
Exemple de tableau de variations :

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ 10 ↘		

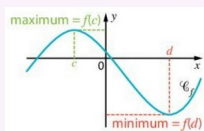
## Extremums :

$f$  admet un **maximum** sur  $I$ , atteint en  $c$  signifie  $f(x) \leq f(c)$  sur  $I$ .  $f(c)$  est le **maximum** de  $f$  sur  $I$ .

$f$  admet un **minimum** sur  $I$ , atteint en  $c$  signifie  $f(x) \geq f(c)$  sur  $I$ .  $f(c)$  est le **minimum** de  $f$  sur  $I$ .



Si  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$ , alors  $f$  admet un **extremum local** en  $a$ . La **tangente** à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$  est alors **parallèle à l'axe des abscisses**.



## Signe d'une fonction à partir de son tableau de variation :

Exemples :

$x$	$a$
$f(x)$	↗ 0 ↘
Signe de $f(x)$	-   0   +

$x$	$a$
$f(x)$	↘ négatif ↗
Signe de $f(x)$	-

# Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Application dérivation

## Étudier les variations d'une fonction

On donne la fonction  $f$  définie sur  $[-3; 3]$  par  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$ .

- Déterminer l'expression de la dérivée de  $f$  et étudier son signe.
- En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- En déduire les extremums de la fonction et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

## Solutions :

1) La dérivée de la fonction  $f$  a pour expression :  $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$ .  $f'$  est une fonction polynôme de degré 2. On étudie son signe :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25.$$

$\Delta > 0$ , donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 5}{2 \times 2} = 2.$$

$a > 0$ , donc  $f'$  est négative entre les racines, donc sur  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ , et positive à l'extérieur des racines, donc sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty[$ .

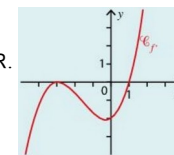
2) On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	-3	$-\frac{1}{2}$	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	$-\frac{49}{2}$	$\nearrow \frac{37}{24}$	$\searrow -\frac{11}{3}$	$\nearrow -\frac{1}{2}$	

3) D'après le tableau de variation, le minimum de  $f$  est  $-\frac{49}{2}$  atteint pour  $x = -3$  et le maximum de  $f$  est  $\frac{37}{24}$  atteint pour  $x = -\frac{1}{2}$ .

## Utiliser la courbe représentative de $f'$

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction  $f$  admet des extremums.



## Solutions :

Grace au graphique, nous pouvons déterminer le signe de  $f'$  et donc les variations de  $f$ . On obtient le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f$	↘ ↗				

$f$  admet donc un minimum en 1. Les données ne nous permettent pas de déterminer la valeur de ce minimum.

### Étudier la position relative de deux courbes

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4$  et  $g(x) = 27x - 5$  et leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  dans un repère. Montrer que le point  $(1; 22)$  est commun aux deux courbes et déterminer la position relative de ces deux courbes.

#### Solutions :

$f(1) = -9 + 27 + 4 = 22$  et  $g(1) = 27 - 5 = 22$  donc le point  $(1; 22)$  est bien commun aux deux courbes.

**Pour étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , il faut étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  :**

$$f(x) - g(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4 - 27x + 5 = -9x^3 + 27x^2 - 27x + 9 = -9(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -9(x-1)^3$$

$(x-1)^3$  est du signe de  $x-1$ , donc le signe de  $-9(x-1)^3$  est du signe opposé à  $x-1$  :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$-9(x-1)^3$		$+$	$0$ $-$

On en déduit que  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de  $\mathcal{C}_g$  sur  $]-\infty; 1[$  et que  $\mathcal{C}_f$  est en dessous de  $\mathcal{C}_g$  sur  $]1; +\infty[$ .

### Exploiter les variations pour déterminer un signe

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 5x - 18$ .

- 1) Démontrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Calculer  $f(2)$  et en déduire le signe de  $f(x)$ .
- 3) Montrer que, pour tout  $x \geq 2$ , on a  $x^3 \geq -5x + 18$ .

#### Solutions :

- 1)  $f'(x) = 3x^2 + 5$ . Puisque  $f'(x)$  est la somme de deux termes positifs, alors  $f'(x)$  est positif. Donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2)  $f(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$ . Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que, pour  $x \leq 2$ ,  $f(x) \leq 0$  et que, pour  $x \geq 2$ ,  $f(x) \geq 0$ .
- 3) D'après la question précédente, pour  $x \geq 2$  on a  $x^3 + 5x - 18 \geq 0$  soit  $x^3 \geq -5x + 18$ .

### Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Fonction exponentielle

### Définition :

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .

On note cette fonction  $f(x) = \exp(x)$ . On la note aussi  $\exp(x) = e^x$ .

On a ainsi  $\exp(1) = e$ . La valeur approchée de  $e$  est  $e \approx 2,71828$

### Fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur  $\mathbb{R}$ .

$$e^x > 0$$

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est (par définition)

$$(e^x)' = e^x$$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$		+
$e^x$		$+\infty$
	0	



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

(programme de terminale)

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

### Résolution d'équations, inéquations :

exemples

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^{x+3} = e^2 \Leftrightarrow x+3=2 \dots$$

$$e^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} > e^0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \dots$$

### Dérivée d'une composée :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

### Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Fonction exponentielle

### Résolutions d'équations, inéquations :

**Résoudre**  $e^{2x+3} = e^x$

$$e^{2x+3} = e^x$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = x$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

La solution est donc :

$$S = \{-3\}$$

**Résoudre**  $2e^x + 5 = 7$

$$2e^x + 5 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

La solution est donc :

$$S = \{0\}$$

**Résoudre**  $e^x - 1 \geq 0$

$$e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

**L'astuce de remplacer 1 par  $e^0$  est souvent utilisée**

La solution est donc :

$$S = [0; +\infty[$$

**Résoudre**  $\frac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$

$$\frac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{(x+3)+(2-x)}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^5}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow e^{5-(-x^2+3)} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+2} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x^2-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$$

**Second degré à bien réviser !**

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x+2$		-	0	+
$x-2$		-	0	+
$(x-2)(x+2)$		+	0	+

Avec le tableau de signe, on trouve finalement  $S = ]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

### Simplifications :

**Simplifier le nombre**  $A = \frac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$$e = e^1$$

$$A = \frac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{3x+3}}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^1 \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3} \times e^{5x}}{e^{x-2}}$$

$$A = e^{(3x+3)-(x-2)}$$

$$A = \frac{e^{2-2x+1} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3+5x}}{e^{x-2}}$$

$$A = e^{2x+5}$$

**Études de fonctions :**

1) Étudier de la fonction  $f(x) = x - e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f'(x) = 1 - e^x$ . Pour étudier le signe de  $f'$ , on résout l'inéquation  $1 - e^x \geq 0$  :

$$1 - e^x \geq 0$$

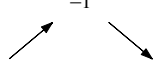
$$e^x \leq 1$$

$$e^x \leq e^0$$

$$x \leq 0$$

Donc  $f'(x) \geq 0$  sur  $]-\infty; 0]$ . De même,  $f'(x) \leq 0$  sur  $[0; +\infty[$ .

On obtient donc le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-1$ 		

2) Étudier de la fonction  $f(x) = e^{-2x+3}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est de la forme  $f(x) = e^u$ .

On a donc  $f'(x) = -2e^{-2x+3}$ .

Or,  $e^{-2x+3} > 0$ , donc  $-2e^{-2x+3} < 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Il y a souvent des signes "évidents" !**

$f'(x) \leq 0$ , donc la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

# Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Produit scalaire

Prérequis : Vecteurs sans coordonnées, coordonnées de vecteurs

## Définition et propriétés :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{u;v}) \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$$

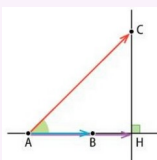
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}), k \in \mathbb{R}$$

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont **colinéaires et de même sens**, on a  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont **colinéaires et de sens contraires**, on a  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AC$

## Projection orthogonale :

Soit  $H$  le **projeté orthogonal** de  $C$  sur la droite  $(AB)$ . Alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$



## Caractérisation de l'orthogonalité :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  équivaut à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux (s'ils sont non nuls)

Si  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ , on dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux lorsque les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont **perpendiculaires**.

## Expression dans un repère orthonormé :

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans un repère orthonormé, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$

En particulier  $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})} = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

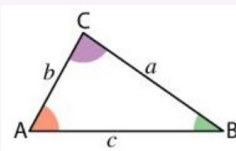
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si, et seulement si,  $x x' + y y' = 0$

## Application du produit scalaire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

L'application de la deuxième formule dans un triangle  $ABC$  donne la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B}) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$$

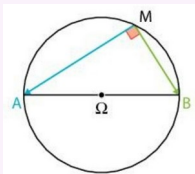


## Théorème de la médiane, caractérisation du cercle :

Théorème de la médiane :  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = M\Omega^2 - \frac{AB^2}{4}$

Caractérisation du cercle : Le cercle de diamètre  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

**Si, dans un cercle, un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point de ce cercle alors ce triangle est rectangle.**

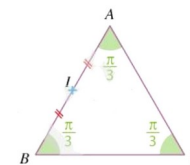


# Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Produit scalaire

## Calculer des produits scalaires

$ABC$  est un triangle équilatéral de côté 2.  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ . Calculer les produits scalaires suivants :

- $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$
- $\vec{AI} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$



### Solutions :

1)  $BC = BA = 2$ , et comme  $ABC$  est équilatéral,  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ , donc

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = BC \times BA \times \cos(\widehat{ABC}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2.$$

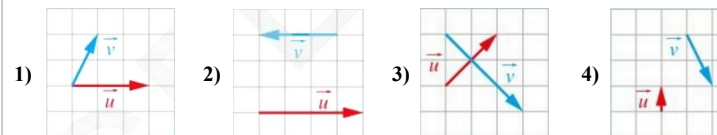
2)  $AC = 2$ ,  $AI = 1$  et  $\widehat{ACI} = \frac{\pi}{3}$ , donc

$$\vec{AI} \cdot \vec{AC} = AI \times AC \times \cos(\widehat{IAC}) = 1 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

3)  $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -\vec{CB} \cdot \vec{CA} = -CB \times CA \times \cos(\widehat{ACB}) = -2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times 2 \times \frac{1}{2} = -2$

## Choisir une expression adaptée pour calculer un produit scalaire

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , l'unité de longueur étant le carreau.



### Solutions :

1) Nous pouvons définir 3 points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\vec{AB} = \vec{u}$  et  $\vec{AC} = \vec{v}$ . On appelle  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . On a alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = 3 \times 1 = 3$ .

2) Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de sens contraire, donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = -4 \times 3 = -12$

3) Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

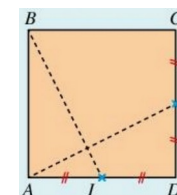
4) En projetant orthogonalement le vecteur  $\vec{v}$  sur la droite de direction du vecteur  $\vec{u}$ , on obtient :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 = -2$ .

## Calculer un produit scalaire en décomposant des vecteurs

$ABCD$  est un carré de côté  $a$ ,  $I$  le milieu de  $[AD]$  et  $J$  est le milieu de  $[CD]$ .

1) En remarquant que  $\vec{AJ} = \vec{AD} + \vec{DJ}$  et que  $\vec{BI} = \vec{BA} + \vec{AI}$ , calculer  $\vec{AJ} \cdot \vec{BI}$ .

2) Que peut-on en conclure ?



**Solutions :**

1)

$$\begin{aligned} \vec{AJ} \cdot \vec{BI} &= (\vec{AD} + \vec{DJ}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AI}) \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{BA} + \vec{AD} \cdot \vec{AI} + \vec{DJ} \cdot \vec{BA} + \vec{DJ} \cdot \vec{AI} \\ &= 0 + \vec{AD} \cdot \vec{AI} + \vec{DJ} \cdot \vec{BA} + 0 \\ &= AD \times AI - DJ \times BA \\ &= a \times \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \times a = 0 \end{aligned}$$

2) On en déduit que les vecteurs  $\vec{AJ}$  et  $\vec{BI}$  sont orthogonaux et que les droites  $(AJ)$  et  $(BI)$  sont perpendiculaires.**Calculer un produit scalaire avec des coordonnées**

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , ainsi que les points  $A(2; 3)$ ,  $B(-5; 4)$ ,  $C(-1; -3)$  et  $D(-1; 1)$ . Calculer les produits scalaires  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ .

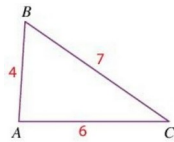
**Solutions :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + (-1) \times 5 = -6 - 5 = -11.$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CD} \begin{pmatrix} -1-(-1) \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ On a alors } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = -7 \times 0 + (1) \times 4 = 4.$$

**Calculer un produit scalaire dans un triangle**

Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  et  $BC = 7$ . Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

**Solutions :**

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} + \vec{CA}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{CB}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - CB^2) = \frac{1}{2} (4^2 + 6^2 - 7^2) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Déterminer une ligne de niveau**

$A$  et  $B$  sont deux points distincts tels que  $AB = 4 \text{ cm}$ . Montrer que l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 40$  est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Solutions :**

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ . D'après le théorème de la médiane, on a :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 40 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 40 \Leftrightarrow MI^2 = 40 + \frac{6^2}{4} \Leftrightarrow MI = 7. \text{ L'ensemble des points } M \text{ est donc le cercle de centre } I \text{ et de rayon } 7.$$

**Calculer des longueurs et des angles dans un triangle**

$ABC$  est un triangle tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 12$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .

1) Calculer  $BC$  et en déduire une mesure en degré de l'angle  $\widehat{BCA}$ .2) Que peut-on en déduire pour le triangle  $ABC$  ?**Solutions :**

1) D'après la formule d'Al-Kashi, on a

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 6^2 + 12^2 - 2 \times 6 \times 12 \times \cos(60^\circ) = 108 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } BC = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

On utilise de nouveau la formule d'Al-Kashi :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{BCA})$$

$$\text{donc } 6^2 = 12^2 + 108 - 2 \times 12 \times 6\sqrt{3} \times \cos(\widehat{BCA}) \text{ et donc } \cos(\widehat{BCA}) = \frac{-216}{-144\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } \widehat{BCA} = 30^\circ.$$

2) La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à  $180^\circ$ , on en déduit :  $\widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ . On peut en conclure que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

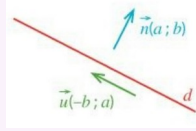
**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

# Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Droites et cercles

Prérequis : Vecteurs sans coordonnées, coordonnées de vecteurs, droites et systèmes, produit scalaire

## Vecteur directeur d'une droite et critère de colinéarité :

Un **vecteur directeur** d'une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .



$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont **colinéaires** si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x y' - y x' = 0$ .

## Vecteur normal à une droite

Un **vecteur normal** à une droite  $d$  est un vecteur non nul **orthogonal à un vecteur directeur de  $d$** , donc à tout vecteur directeur de  $d$ .

Soit  $d$  une droite de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $A$  un point de  $d$  et  $M$  un point du plan.  $M$  appartient à  $d$  si, et seulement si,  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

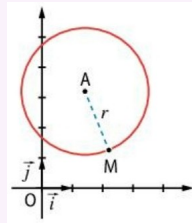
Si  $d$  est une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ , un vecteur normal à  $d$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  (et réciproquement)

## Équation d'un cercle

Cercle de centre  $A(x_A; y_A)$  et de rayon  $r$  :  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Tout cercle a une équation de la forme  $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$

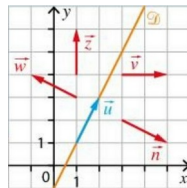
(parabole :  $y = ax^2 + bx + c$ )



# Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Droites et cercles

## Identifier des vecteurs normaux à une droite

On considère la droite  $\mathcal{D}$  dont le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur directeur. Quels sont, parmi les vecteurs  $\vec{n}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{z}$  représentés sur la figure ci-contre, les deux vecteurs normaux à  $\mathcal{D}$  ?



### Solutions :

D'après la figure, on conjecture que les deux vecteurs normaux à  $\mathcal{D}$  sont  $\vec{n}$  et  $\vec{w}$ .

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{w}$  ont pour coordonnées  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont donc bien orthogonaux.

$\vec{w} \cdot \vec{u} = -2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont donc bien orthogonaux.

## Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à une droite donnée

1) Soit  $\mathcal{D}_1$  la droite passant par le point  $A(2; 5)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite  $\mathcal{D}_1$ .

2) Soit  $\mathcal{D}_2$  la droite dont une équation cartésienne est  $-x - 4y + 1 = 0$ . Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite  $\mathcal{D}_2$ .

### Solutions :

1) Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_1$  donc  $\mathcal{D}_1$  admet une équation cartésienne de la forme  $3x + y + c = 0$  avec  $c \in \mathbb{R}$ . On en déduit que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}_1$ .

2) Avec l'équation cartésienne, on déduit directement un vecteur normal à  $\mathcal{D}_2$  :  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

## Déterminer une équation cartésienne de droite

Soit  $\Delta$  une droite passant par le point  $A(2; 1)$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer une équation cartésienne de  $\Delta$ .

### Solutions :

$$\begin{aligned} M(x; y) \text{ appartient à } \mathcal{D} &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow -1 \times (x-2) + 2 \times (y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + 2 + 2y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + 2y = 0 \end{aligned}$$

On en déduit qu'une équation cartésienne de  $\Delta$  est  $-x + 2y = 0$ .

## Déterminer une équation de cercle

Soient les points  $A(1; 1)$  et  $B(5; -2)$ .

Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$ . Déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

### Solutions :

#### Méthode n°1 :

Le centre de  $\mathcal{C}$  est le milieu  $I$  de  $[AB]$ . Ses coordonnées sont donc :  $I \left( \frac{1+5}{2}; \frac{1-2}{2} \right)$  soit  $I \left( 3; -\frac{1}{2} \right)$ . Le rayon est la

longueur  $AI$ . On a donc  $r^2 = AI^2 = (3-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 = \frac{25}{4}$ .

Donc  $\mathcal{C}$  admet pour équation  $(x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

#### Méthode n°2 :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)(5-x) + (1-y)(-2-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + y = -3 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -3 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Probabilités conditionnelles

### Probabilité conditionnelle :

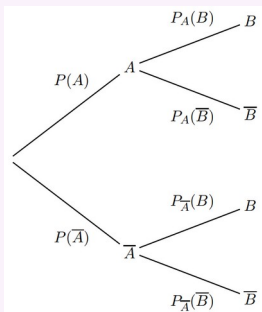
Soit  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(A) \neq 0$ . On appelle **probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$** , la probabilité que l'événement  $B$  se réalise sachant que l'événement  $A$  est réalisé. Elle est notée  $P_A(B)$ .

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

$$0 \leq P_A(B) \leq 1, \quad P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

### Arbres pondérés et tableaux :



	$B$	$\bar{B}$	Total
$A$	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

### Formule des probabilités totales :

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  constituent une **partition de l'univers**, alors  $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$

### Cas particulier de 2 événements :

Si  $A$  et  $\bar{A}$  constituent une **partition de l'univers**, alors :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

### Événements indépendants :

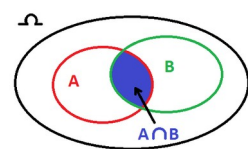
On dit que deux événements  $A$  et  $B$  de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On a alors  $P_A(B) = P(B)$  et  $P_B(A) = P(A)$ . Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.

### Probabilité de l'union :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Probabilités conditionnelles

### Utiliser un arbre pondéré :

Dans un restaurant, 65 % des clients viennent déjeuner le midi, le reste vient le soir. Parmi les clients du midi, 55 % commandent une formule entrée-plat-dessert, contre 30 % pour les clients du soir.

On note :

$F$  l'événement "le client commande une formule entrée-plat-dessert".

$M$  l'événement "le client vient le midi"

1) Comment note-t-on l'événement "le client vient le soir" ?

2) Construire un arbre de probabilités avec les données

3) Traduire par une phrase l'événement  $F \cap M$  et calculer sa probabilité.

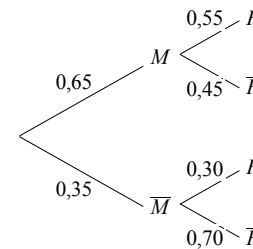
4) Montrer que la probabilité de  $F$  est 0,4625.

5) Un client a commandé une formule entrée-plat-dessert. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il soit un client du midi ?

### Solution :

1) l'événement "le client vient le soir" se note  $\bar{M}$ .

2)



3)  $F \cap M$  est l'événement "le client vient le midi et commande une formule entrée-plat-dessert"

$$P(F \cap M) = P(M) \times P_M(F) = 0,65 \times 0,55 = 0,3575.$$

4)  $M$  et  $\bar{M}$  constituent une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(M \cap F) + P(\bar{M} \cap F) \\ &= P(M) \times P_M(F) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(F) \\ &= 0,65 \times 0,55 + 0,35 \times 0,30 = 0,4625 \end{aligned}$$

5) Nous recherchons  $P_F(M)$ . Avec la formule du cours, nous avons :

$$P_F(M) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{0,3575}{0,4625} \approx 0,773.$$

### Événements indépendants :

1) Dans chacun des cas, dire si les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants :

a)  $P(A) = \frac{1}{5}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$  et  $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ .

b)  $P(A) = 0,4$ ,  $P_A(B) = 0,4$  et  $P_B(A) = 0,7$ .

### Solution :

a)  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ . On a  $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ . Donc les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

b)  $P(A) \neq P_B(A)$ , donc les événements ne sont pas indépendants.

2) Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants tels que  $P(A) = 0,3$  et  $P(B) = 0,8$ . Calculer  $P(A \cap B)$ .

### Solution :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$$

**Utiliser un tableau :**

On donne le tableau suivant où  $A$  et  $B$  sont deux évènements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire :

	$B$	$\bar{B}$	Total
$A$	0,32		
$\bar{A}$		0,2	0,36
Total			

- 1) Compléter le tableau en justifiant.
- 2) Calculer  $P_A(B)$ .
- 3) Les évènements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

**Solution :**

$$\begin{aligned}
 1) P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,36 - 0,2 = 0,16 \\
 P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,32 + 0,16 = 0,48 \\
 P(\bar{B}) &= 1 - P(B) = 1 - 0,48 = 0,52 \\
 P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,36 = 0,64 \\
 P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = 0,64 - 0,32 = 0,32
 \end{aligned}$$

On a donc :

	$B$	$\bar{B}$	Total
$A$	0,32	0,32	0,64
$\bar{A}$	0,16	0,2	0,36
Total	0,48	0,52	1

$$2) P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,32}{0,64} = 0,5.$$

- 3)  $P(B) \neq P_A(B)$ , donc les évènements  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.

**Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :**

## Le cours – 1<sup>ère</sup> spé : Variables aléatoires

### Un exemple simple pour comprendre :

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat." L'ensemble de toutes les issues possibles  $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$  s'appelle l'univers des possibles.

On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair." On a donc :  $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ .

On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc :  $E = \{3\}$ .

On considère maintenant le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2€.

- Si le résultat est 1, on gagne 3€.

- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On a défini ainsi une variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$  qui peut prendre les 3 valeurs  $x_1=2$ ,  $x_2=3$  ou  $x_3=-4$ .

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  (les 3 chiffres pairs). On la

note :  $P(X=2) = \frac{1}{2}$ . De même,  $P(X=3) = \frac{1}{6}$  et  $P(X=-4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

On obtient la loi de probabilité de  $X$  :

$x_i$	2	3	-4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{3} \times (-4) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(3 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(-4 - \frac{1}{6}\right)^2 \approx 8,806$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,967$$

### Le cours :

Une **variable aléatoire  $X$**  est une fonction définie sur un univers  $\Omega$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Elle associe un nombre à des événements.

Soit une variable aléatoire  $X$  définie sur un univers  $\Omega$  et prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

La loi de probabilité de  $X$  associe à toute valeur  $x_i$  la probabilité  $P(X=x_i)$ .

On la résume souvent dans un tableau. :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P(X=x_i)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

**La somme des  $p_i$  est toujours égale à 1**

- **L'espérance** mathématique de la loi de probabilité de  $X$  est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + \dots + p_n \times x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

- **La variance** de la loi de probabilité de  $X$  est :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + p_3 \times (x_3 - E(X))^2 + \dots + p_n \times (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

- **L'écart-type** de la loi de probabilité de  $X$  est :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## Les méthodes – 1<sup>ère</sup> spé : Variables aléatoires

### Exercices n°1 :

On organise un tombola dans un village. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus. L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 620€, neuf billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 70€, cinquante billets sont remboursés, et les autres sont perdants. Les billets sont vendus 5€.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe la somme d'argent gagnée (comptée positivement) ou perdue (comptée négativement).

1) Donner les différentes valeurs prises par  $X$ .

2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

3) Calculer l'espérance mathématique de  $X$  et donner une interprétation du résultat obtenu.

**Solution :**

1) Les valeurs prises par  $X$  sont -5, 0, 65 et 615.

2) Loi de probabilité de  $X$  :

$x_i$	-5	0	65	615
$P(X=x_i)$	$\frac{440}{500}$	$\frac{50}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

$$3) E(X) = \frac{440}{500} \times (-5) + \frac{50}{500} \times 0 + \frac{9}{500} \times 65 + \frac{1}{500} \times 615 = -2$$

On peut en conclure qu'en moyenne, les participants perdent 2€. Le village peut espérer gagner  $500 \times 2 = 1000$  €.

### Exercices n°2 :

On considère un jeu pour lequel la probabilité de gagner est de  $\frac{3}{7}$ . Pour jouer, le joueur doit payer  $k$  euros,  $k$  désignant

un entier naturel non nul. Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien. On note  $G$  la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est à dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).

1) Déterminer la loi de probabilité de  $G$ .

2) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

**Solution :**

1) On a  $P(G=10-k) = \frac{3}{7}$  et  $P(G=-k) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ . On a donc la loi de probabilité :

$g_i$	-k	10-k
$P(G=g_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

2) L'espérance mathématique de la variable  $G$  est égale à

$$E(G) = \frac{4}{7} \times (-k) + \frac{3}{7} \times (10-k) = \frac{-4k+30-3k}{7} = \frac{30-7k}{7}$$

Le jeu est favorable au joueur si :

$$E(G) > 0 \Leftrightarrow \frac{30-7k}{7} > 0 \Leftrightarrow 30-7k > 0 \Leftrightarrow 7k < 30 \Leftrightarrow k < \frac{30}{7} \approx 4,3$$

La somme payée au départ doit être inférieure à 4,3. Elle ne doit donc pas dépasser 4€ afin que le jeu reste favorable au joueur.