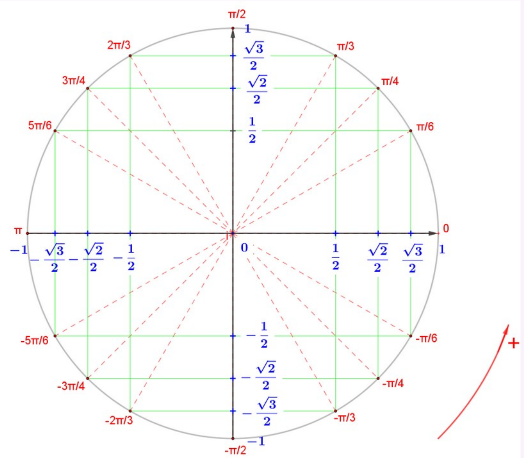
Le cours – 1ère spé : Trigonométrie

Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, orienté dans le **sens inverse des aiguilles d'une montre**.



x (en degrés)	0°	30°	45°	60°	90°	180°
x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Angle $\widehat{IOM}$ (en degrés)	0°	30°	45°	60°	90°
réel a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés du cosinus et du sinus

$$-1 \leqslant \cos(a) \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1$$

$$\cos(a+2k\pi) = \cos(a) \text{ et } \sin(a+2k\pi) = \sin(a) \text{ pour } k \text{ entier}$$

$$(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1 \text{ qui peut s'écrire } \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

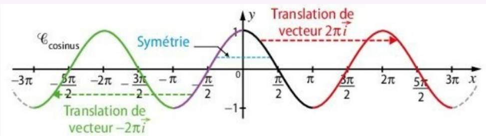
Les fonctions cosinus et sinus

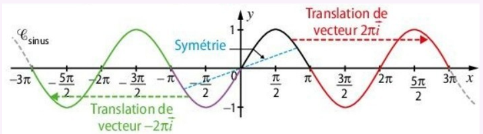
Les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π : $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.

La fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire** : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

x	0	π
$\cos(x)$	1 ↘	−1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0





Les méthodes – 1ère spé : Trigonométrie

Convertir des angles en radian (déterminer des longueurs d'arc)

Convertir en radian les angles de mesures suivantes données en degré :

1) 30° **2)** 0° **3)** 150° **4)** 210° **5)** 225°

Solutions :

On utilise un tableau de proportionnalité sachant que 360° correspond à 2π en radian.

Angle en degré	360	30	0	150	210	225
Angle en radian	2π	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

Convertir des angles en degré

Convertir en degré les angles de mesures suivantes données en radian :

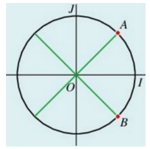
1) $\frac{3\pi}{2}$ **2)** $\frac{2\pi}{5}$ **3)** $\frac{3\pi}{4}$ **4)** $\frac{7\pi}{3}$ **5)** $\frac{\pi}{8}$

Solutions :

On utilise un tableau de proportionnalité.

Angle en radian	2π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{\pi}{8}$
Angle en degré	360	270	72	135	75	22,5

Se repérer sur le cercle trigonométrique



Le cercle ci-contre est le cercle trigonométrique partagé en huit arcs de même longueur.
Pour chacun des points A et B du cercle, donner **trois** réels dont il est le point-image.

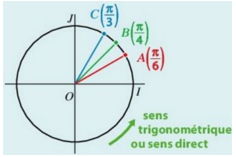
Solutions :

Pour aller de I à A dans le sens trigonométrique, on parcourt un arc de longueur un huitième de la longueur du cercle. A est donc le point-image du nombre $\frac{\pi}{4}$. Pour déterminer d'autres réels dont A est le point-image, il suffit d'ajouter ou de retrancher des multiples de 2π : $\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$.

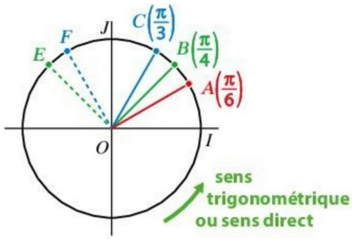
De même, B est le point-image des nombres $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

Placer des points sur le cercle trigonométrique

On a placé sur le cercle trigonométrique ci-contre trois points-images de trois nombres.
Reproduire le cercle et placer les points $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.



Solutions :



Utiliser les propriétés du cosinus et du sinus

Déterminer le signe des nombres réels suivants où $a \in \mathbb{R}$:

1) $1 - \cos(a)$ **2)** $-\sin(a) - 1$

Solutions :

1) On sait que $-1 \leqslant \cos(a) \leqslant 1$ d'où $1 \geqslant -\cos(a) \geqslant -1$ et $2 \geqslant 1-\cos(a) \geqslant 0$. On a donc $1-\cos(a) \geqslant 0$.

2) On sait que $-1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1$ d'où $1 \geqslant -\sin(a) \geqslant -1$ et $0 \geqslant -\sin(a)-1 \geqslant -2$. On a donc $-\sin(a)-1 \leqslant 0$.

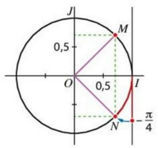
Utiliser les valeurs de sinus et cosinus

1) Déterminer les valeurs exactes de cosinus et sinus de $-\frac{\pi}{4}$.

2) Calculer $A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Solutions :

1) Sur le cercle trigonométrique ci-contre, le point-image de $-\frac{\pi}{4}$ est le point N.



On a donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique

Démontrer que la fonction $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ est périodique de période 2π.

Solutions :

Pour tout réel x, on calcule $f(x+2\pi)$:

$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin(x) + \cos(x) = f(x)$.

La fonction f est périodique de période 2π.

Montrer qu'une fonction est paire ou impaire

On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \sin(x) + x$.
1) Montrer que la fonction est impaire.
2) Qu'en déduit-on pour sa courbe représentative dans un repère orthonormé ?

Solutions :

1) On calcule $f(-x) = \sin(-x) - x = -\sin(x) - x = -(\sin(x) + x) = -f(x)$. La fonction f est impaire.

2) La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :