Le cours – 1ère spé : Variables aléatoires

Un exemple simple pour comprendre :

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat." L'ensemble de toutes les **issues** possibles Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle **l'univers** des possibles.
On considère **l'événement** A : "On obtient un résultat pair." On a donc : A = {2 ; 4 ; 6}.
On considère **l'événement élémentaire** E : "On obtient un 3". On a donc : E = {3}.

On considère maintenant le jeu suivant :
- Si le résultat est pair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 1, on gagne 3€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On a défini ainsi une variable aléatoire *X* sur Ω qui peut prendre les 3 valeurs $x_1=2$, $x_2=3$ ou $x_3=-4$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (les 3 chiffres pairs). On la note : $P(X=2)=\frac{1}{2}$. De même, $P(X=3)=\frac{1}{6}$ et $P(X=-4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

On obtient la **loi de probabilité de *X*** :

x_i	2	3	- 4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{3}\times(-4)=1+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$$

$$V(X)=\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\times\left(3-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left((-4)-\frac{1}{6}\right)^2\approx 8{,}806$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx 2{,}967$$

Le cours :

Une **variable aléatoire *X*** est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans ℝ. Elle associe un nombre à des évènements.

Soit une variable aléatoire *X* définie sur un univers Ω et prenant les valeurs x_1 , x_2 , … , x_n.
La loi de probabilité de *X* associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X=x_i)$.
On la résume souvent dans un tableau. :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

La somme des p_i est toujours égale à 1

- **L'espérance** mathématique de la loi de probabilité de *X* est :

$$E(X)=p_1\times x_1+p_2\times x_2+p_3\times x_3+\ldots+p_n\times x_n=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$$

- **La variance** de la loi de probabilité de *X* est :

$$V(X)=p_1\times\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\times\left(x_2-E(X)\right)^2+p_3\times\left(x_3-E(X)\right)^2+\ldots+p_n\times\left(x_n-E(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i-E(X)\right)^2$$

- **L'écart-type** de la loi de probabilité de *X* est : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Les méthodes – 1ère spé : Variables aléatoires

Exercices n°1 :

On organise un tombola dans un village. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus. L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 620€, neuf billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 70€, cinquante billets sont remboursés, et les autres sont perdants. Les billets sont vendus 5€.
Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe la somme d'argent gagnée (comptée positivement) ou perdue (comptée négativement).
1) Donner les différentes valeurs prises par *X*.
2) Déterminer la loi de probabilité de *X*.
3) Calculer l'espérance mathématique de *X* et donner une interprétation du résultat obtenu.

Solution :

1) Les valeurs prises par *X* sont -5, 0, 65 et 615.
2) Loi de probabilité de *X* :

x_i	- 5	0	65	615
$P(X=x_i)$	$\frac{440}{500}$	$\frac{50}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

3) $E(X)=\frac{440}{500}\times(-5)+\frac{50}{500}\times 0+\frac{9}{500}\times 65+\frac{1}{500}\times 615=-2$

On peut en conclure qu'en moyenne, les participants perdent 2€. Le village peut espérer gagner $500\times 2=1000$ €.

Exercices n°2 :

On considère un jeu pour lequel la probabilité de gagner est de $\frac{3}{7}$. Pour jouer, le joueur doit payer *k* euros, *k* désignant un entier naturel non nul. Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien. On note *G* la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est à dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
1) Déterminer la loi de probabilité de *G*.
2) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

Solution :

1) On a $P(G=10-k)=\frac{3}{7}$ et $P(G=-k)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$. On a donc la loi de probabilité :

g_i	$-k$	$10-k$
$P(G=g_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

2) L'espérance mathématique de la variable *G* est égale à

$$E(G)=\frac{4}{7}\times(-k)+\frac{3}{7}\times(10-k)=\frac{-4k+30-3k}{7}=\frac{30-7k}{7}.$$

Le jeu est favorable au joueur si :

$$E(G)>0 \Leftrightarrow \frac{30-7k}{7}>0 \Leftrightarrow 30-7k>0 \Leftrightarrow 7k<30 \Leftrightarrow k<\frac{30}{7}\approx 4{,}3$$

La somme payée au départ doit être inférieure à 4,3. Elle ne doit donc pas dépasser 4€ afin que le jeu reste favorable au joueur.