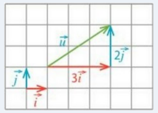
Le cours – 2nd : Vecteurs et coordonnées

Prérequis : introduction vecteurs

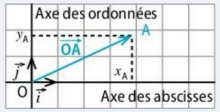
Base, repère :



Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan et dont les directions sont **perpendiculaires** et tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$. Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée** des vecteurs du plan.

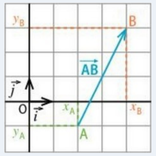
Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont deux nombres réels.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $(x\,;y)$ est le couple de **coordonnées du vecteur $\vec{u}$** dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On appelle **repère orthonormé** du plan le triplet $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ constitué d'un point O du plan appelé origine et d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.



Tout point A du plan muni d'une repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ possède des **coordonnées** $(x_A\,; y_A)$ qui correspondent à celles du vecteur $\vec{OA}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Calculs avec les coordonnées :



Soient deux points $A(x_A\,; y_A)$ et $B(x_B\,; y_B)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
Les **coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont** $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

Soient k un nombre réel et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ $\quad -\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$ $\quad k\,\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Le **milieu d'un segment** $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

La **norme du vecteur** $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$. La norme d'un vecteur $\vec{AB}$ est $\vec{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Condition de colinéarité :

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

S'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**. k est le **coefficient de colinéarité**.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

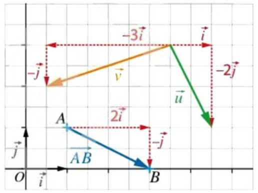
Les méthodes – 2nd : Vecteurs et coordonnées

Construire un vecteur dont on connaît les coordonnées

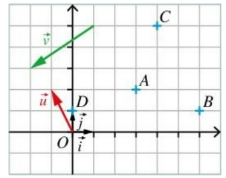
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
1) Représenter les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Soit le point $A(1\,;1)$. Placer le point B tel que $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solutions :



Déterminer les coordonnées d'un vecteurs



On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(3\,;2)$, $B(6\,;1)$, $C(4\,;5)$ et $D(0\,;1)$, ainsi que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
1) Déterminer graphiquement les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.

Solutions :

1) Le vecteur $\vec{u}$ représente un déplacement de -1 unité sur l'axe des abscisses et de 2 unités sur l'axe des ordonnées.
Donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-2 \end{pmatrix}$, soit $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$\vec{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$, donc $\vec{CD}\begin{pmatrix} 0-4 \\ 1-5 \end{pmatrix}$, soit $\vec{CD}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Calculer avec des coordonnées

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.
1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\frac{3}{2}\vec{v}$.
2) Soit $\vec{w} = 2\,\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$. Calculer les coordonnées de $\vec{w}$ et en déduire sa norme.

Solutions :

1) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} -4+6 \\ 3-9 \end{pmatrix}$, soit $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{3}{2}\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\times 6 \\ \frac{3}{2}\times(-9) \end{pmatrix}$, soit $\frac{3}{2}\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$.

2) $\vec{w}\begin{pmatrix} 2\times(-4) - \frac{1}{3}\times 6 \\ 2\times 3 - \frac{1}{3}\times(-9) \end{pmatrix}$, soit $\vec{w}\begin{pmatrix} -8-2 \\ 6-(-3) \end{pmatrix}$, donc $\vec{w}\begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}$. On a donc $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-10)^2+9^2} = \sqrt{181}$.

Démontrer avec des coordonnées

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2\,;1)$, $B(3\,;4)$, $C(6\,;5)$ et $D(5\,;2)$.
1) Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
2) Montrer que $AB=BC$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

Solutions :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\4-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6-5\\5-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
On peut en conclure que $ABCD$ est un parallélogramme.

2) $AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ et $BC=\sqrt{(6-3)^2+(5-4)^2}=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{10}$. Donc $AB=BC$. $ABCD$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont de même longueur. $ABCD$ est donc un losange.

Calculer les coordonnées d'un milieu

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-8\,;5)$, $B(3\,;1)$, $C(4\,;-1)$ et $D(-9\,;7)$.
Calculer les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$ et celles du milieu K du segment $[CD]$. Que peut-on en déduire ?

Solutions :

$J\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$, soit $J\left(\dfrac{-8+3}{2}\,;\dfrac{5+1}{2}\right)$. Donc $J\left(-\dfrac{5}{2}\,;3\right)$.
$K\left(\dfrac{x_C+x_D}{2}\,;\dfrac{y_C+y_D}{2}\right)$, soit $K\left(\dfrac{4+(-9)}{2}\,;\dfrac{-1+7}{2}\right)$. Donc $K\left(-\dfrac{5}{2}\,;3\right)$.
Les points J et K sont confondus. On en déduit que les diagonales du quadrilatère $ACBD$ ont le même milieu : $ACBD$ est un parallélogramme.

Montrer que des vecteurs sont / ne sont pas colinéaires

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}20\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}30\\9\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
2) On considère les points $A(2\,;5)$, $B(6\,;8)$, $C(-4\,;1)$ et $D(5\,;8)$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

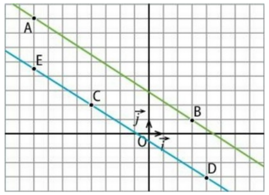
Solutions :

1)
Méthode n°1 :
$det(\vec{u},\vec{v})=20\times9-30\times6=180-180=0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode n°2 :
On remarque que $30=\dfrac{3}{2}\times20$ et que $9=\dfrac{3}{2}\times6$. On a donc $\vec{v}=\dfrac{3}{2}\times\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-2\\8-5\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5-(-4)\\8-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=4\times7-9\times3=28-27=1$.
On conclut : $det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\neq0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

Caractériser alignement et parallélisme



On considère les points $A(-8\,;8)$, $B(3\,;1)$, $C(-4\,;2)$ et $D(4\,;-3)$ et $E\left(-8\,;\dfrac{9}{2}\right)$.

1) Les points E, C et D sont-ils alignés ? Justifier.
2) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Justifier.

Solutions :

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$:

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-4-(-8)\\2-\dfrac{9}{2}\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}4\\-\dfrac{5}{2}\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}4-(-8)\\-3-\dfrac{9}{2}\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}12\\-\dfrac{15}{2}\end{pmatrix}$.
On remarque que $\overrightarrow{ED}=3\,\overrightarrow{EC}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires, donc E, C et D sont alignés.

2) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-8)\\1-8\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-7\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-(-4)\\-3-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=11\times(-5)-8\times(-7)=-55+56=1\neq0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires. Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :