

Le cours – 1^{ère} Spé : Second degré

Prérequis : Fonctions de référence

Polynôme du second degré :

La fonction qui, à tout réel x associe $ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul, est une **fonction polynôme du second degré**. Les réels a , b et c sont les **coefficients de ce polynôme**. Soit f une fonction polynôme du second degré. Les **racines** de ce polynôme, si elles existent, sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Forme factorisée :

Si f est une fonction polynôme du second degré **ayant deux racines distinctes** x_1 et x_2 , alors f peut s'écrire sous **forme factorisée** : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. On a alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Forme canonique :

Pour tout polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que :
 $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
 $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** du polynôme $ax^2 + bx + c$. On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
 La représentation graphique de f est une **parabole** dont le sommet S a pour coordonnées $S(\alpha; \beta)$. La droite d'équation $x = \alpha$ est un **axe de symétrie** de la parabole.

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

Le réel $b^2 - 4ac$, noté Δ , est appelé **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

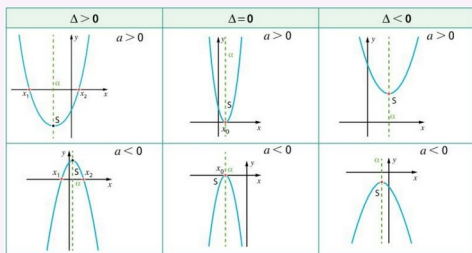
Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré a **deux solutions** distinctes :
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 et la forme factorisée est $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré a **une solution** :
 $x_0 = -\frac{b}{2a}$
 et la forme factorisée est $ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2$

Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré n'a **pas de solution réelle**. Le polynôme ne peut pas être factorisé.

Signe et variations du polynôme :

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$																								
Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$	<table border="1"> <tr><th>x</th><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><th>f(x)</th><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td><td>signe de a</td></tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	f(x)	signe de a	0	signe de a	signe de a	<table border="1"> <tr><th>x</th><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><th>f(x)</th><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr> </table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	f(x)	signe de a	0	signe de a	<table border="1"> <tr><th>x</th><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><th>f(x)</th><td colspan="2">signe de a</td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	f(x)	signe de a	
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																							
f(x)	signe de a	0	signe de a	signe de a																							
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																								
f(x)	signe de a	0	signe de a																								
x	$-\infty$	$+\infty$																									
f(x)	signe de a																										



Les méthodes – 1^{ère} Spé : Second degré

Écrire sous forme canonique un polynôme du second degré :

Déterminer la forme canonique du trinôme $f(x) = -x^2 + 2x - 5$.

Solutions :

Méthode n°1 :

f est une fonction polynôme de degré 2, de coefficients $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$. Son écriture canonique est $-(x-\alpha)^2 + \beta$ avec : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = f(1) = -4$.

Donc pour tout x réel, $f(x) = -(x-1)^2 - 4$.

Méthode n°2 :

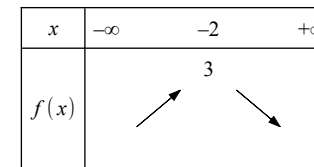
On factorise f par $a = -1$: $f(x) = -(x^2 - 2x + 5)$. Puis en remarquant que $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, on obtient :
 $f(x) = -[(x-1)^2 - 1 + 5] = -(x-1)^2 - 4$.

Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2 :

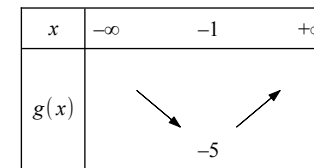
Étudier les variations des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3 - (x+2)^2$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$

Solutions :

Pour f , on reconnaît la forme canonique avec $a = -1$, $\alpha = -2$ et $\beta = 3$. Le sommet de la parabole est donc $S(-2; 3)$ et étant donné le signe de a , f est strictement croissante sur $]-\infty; -2]$ et strictement décroissante sur $]-2; +\infty[$.



Pour g , on a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$ et $\beta = g(\alpha) = g(-1) = -5$. Le sommet de la parabole est donc $S(-1; -5)$ et étant donné le signe de a , g est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.



Identifier la forme d'une fonction polynôme de degré 2 :

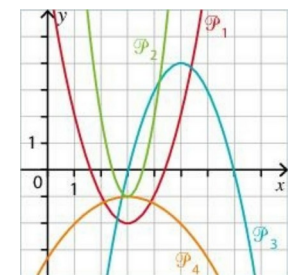
Sans calculatrice, associer chaque fonction polynôme ci-dessous à la parabole qui la représente.

$f(x) = -1 + 3(x-3)^2,$

$g(x) = -1 - 0,25(x-3)^2$

$h(x) = x^2 - 6x + 7,$

$i(x) = (x-3)(7-x)$



Solutions :

On peut écrire la fonction $i : i(x) = -(x-3)(x-7)$. C'est une forme factorisée. Les racines de i sont donc 3 et 7. Sa représentation graphique coupe donc l'axe des abscisses aux points $(3;0)$ et $(7;0)$: il s'agit de \mathcal{P}_3 .
 f est sous forme canonique. Elle admet un minimum (car $a > 0$) pour $x = 3$ qui vaut -1. Sa courbe représentative est \mathcal{P}_2 .
 g est sous forme canonique. Elle admet un maximum (car $a < 0$) pour $x = 3$ qui vaut -1. Sa courbe représentative est \mathcal{P}_4 .
 Par élimination, la courbe représentative de h est \mathcal{P}_1 .

Résoudre une équation du second degré :

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - 3x + 1 = 0$ 2) $x^2 + x + 1 = 0$ 3) $0,3x^2 - 3x + 7,5 = 0$

Solutions :

1) On calcule le discriminant Δ . On a $a = 1, b = -3$ et $c = 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$
 $\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

2) On calcule le discriminant Δ . On a $a = 1, b = 1$ et $c = 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$
 $\Delta < 0$, donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

3) On calcule le discriminant Δ . On a $a = 0,3, b = -3$ et $c = 7,5$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 0,3 \times 7,5 = 0$
 $\Delta = 0$, donc l'équation admet une unique solution réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 0,3} = \frac{3}{0,6} = 5.$$

Factoriser un trinôme du second degré :

Déterminer les racines éventuelles et en déduire, si possible, une expression factorisée des trinômes suivants.

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ 2) $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$ 3) $h(x) = 18x^2 - 12x + 2$

Solutions :

1) $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -20$
 $\Delta < 0$, donc f ne peut pas être factorisé.

2) $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49$
 $\Delta > 0$, donc g possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2 \times (-2)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{2}$$

On peut donc factoriser $g : g(x) = -2 \left(x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) (x - 3) = (-2x - 1)(x - 3)$

3) $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 18 \times 2 = 0$
 $\Delta = 0$, donc h possède une unique racine réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times 18} = \frac{1}{3}$$

On peut donc factoriser $h : h(x) = 18 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2$.

Détecter les racines d'un polynôme du second degré :

Soit le polynôme $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$. Trouver une racine évidente de $f(x)$ et en déduire la deuxième racine.

Solutions :

Pour $x = 1$, on a $f(1) = 5 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1 = 0$, donc 1 est une racine évidente. Soit x_2 la deuxième racine.

$$1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{5}, \text{ donc } x_2 = -\frac{1}{5}.$$

Étudier le signe d'un trinôme du second degré :

Étudier le signe des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : 1) $f(x) = -3x^2 - 5x + 2$ et 2) $g(x) = 2x^2 - 4x + 2,4$

Solutions :

1) Pour $f, \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 49$.

$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 7}{2 \times (-3)} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 7}{2 \times (-3)} = -2.$$

$a < 0$, on obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

2) Pour $g, \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2,4 = -3,2$.

$\Delta < 0$, donc le trinôme est du signe de a sur \mathbb{R} .

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		$+$

Résoudre des inéquations :

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $(2x + 1)(3 - x) > 0$ 2) $-2x^2 + 5x \leq 4$ 3) $(x - 4)^2 \leq (-5x + 2)^2$

Solutions :

$$(2x + 1)(3 - x) > 0$$

Le trinôme est sous forme

factorisée. Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et

3. Comme $a < 0$ ($a = -2$) :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$		
		$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\frac{1}{2}; 3 \right[$$

$$\begin{aligned} -2x^2 + 5x &\leq 4 \\ -2x^2 + 5x - 4 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = -7$$

Le trinôme est du signe de a sur \mathbb{R} .

Comme $a < 0$,

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &\leq (-5x+2)^2 \\ (x-4)^2 - (-5x+2)^2 &\leq 0 \\ (x-4+5x-2)(x-4-5x+2) &\leq 0 \\ (6x-6)(-4x-2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Le trinôme est sous forme factorisée. Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 1. Comme $a < 0$ ($a = -24$) :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
		$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup [1; +\infty[$$

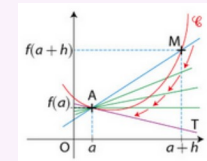
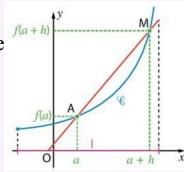
Le cours – 1^{ère} spé : Dérivation locale

Nombre dérivé :

Coefficient directeur d'une droite (AB) : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Taux de variation entre a et b : $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Il s'agit de la **pen**te de la **sécante** à la courbe entre les points d'abscisses a et b .

Taux de variation entre a et $a+h$: $\tau = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Il s'agit de la **pen**te de (AM) .



Nombre dérivé en a se note $f'(a)$:

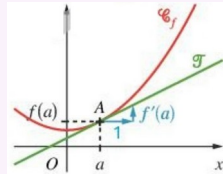
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Équation de tangente :

Équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Les méthodes – 1^{ère} spé : Dérivation locale

Calculer le taux de variation et la pente d'une sécante :

On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - x$.

1) Calculer la pente de la sécante à la courbe de f entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4.

2) Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.

Solutions :

1) La pente de la sécante à la courbe de f entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse 4 est égale à $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$.

Or, $f(4) = 2 \times 4^2 - 4 = 28$ et $f(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1$.

Ainsi, $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{28 - 1}{3} = 9$. La pente recherchée est donc égale à 9.

2) Le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est : $\tau = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

On a $f(2) = 2 \times 2^2 - 2 = 6$ et $f(2+h) = 2 \times (2+h)^2 - (2+h) = 2 \times (4 + 4h + h^2) - (2+h) = 8 + 8h + 2h^2 - 2 - h = 2h^2 + 7h + 6$

Ainsi, $\tau = \frac{2h^2 + 7h + 6 - 6}{h} = \frac{2h^2 + 7h}{h} = \frac{h(2h + 7)}{h} = 2h + 7$

Le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est donc $2h + 7$.

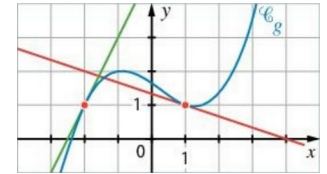
Déterminer graphiquement un nombre dérivé :

On a tracé ci-contre la courbe représentative \mathcal{C}_g d'une fonction g ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.

1) Déterminer graphiquement le nombre dérivé de g en -2.

2) Déterminer graphiquement $g'(1)$.

3) Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1.



Solution :

1) Le nombre dérivé de g en -2, $g'(-2)$, est la pente de la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse -2. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (-2 ; 1) et (-1 ; 3) appartiennent à cette tangente (droite verte). On a donc :

$$g'(-2) = \frac{3 - 1}{-1 - (-2)} = 2.$$

2) $g'(1)$ est la pente de la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1. D'après le graphique, les deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4 ; 0) appartiennent à cette tangente (droite rouge). On a donc :

$$g'(1) = \frac{0 - 1}{4 - 1} = -\frac{1}{3}.$$

3) L'équation de la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1 est donnée par : $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$. Par lecture graphique, $g(1) = 1$, et nous savons déjà que $g'(1) = -\frac{1}{3}$. Nous obtenons alors :

$$y = -\frac{1}{3}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

L'équation de la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1 est donc $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Déterminer l'équation d'une tangente :

On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

1) Calculer $f'(0)$.

2) Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

Solution :

1) Le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ est :

$$\tau = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} - \frac{0+1}{0-1}}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + 1}{h} = \frac{\frac{h+1}{h-1} + \frac{h-1}{h-1}}{h} = \frac{\frac{2h}{h-1}}{h} = \frac{2h}{h-1} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{h-1}$$

On a donc $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h-1} = -2$

2) L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est donnée par : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Nous avons $f(0) = -1$ et $f'(0) = -2$, d'où $y = -2(x - 0) - 1 = -2x - 1$

L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est donc $y = -2x - 1$.

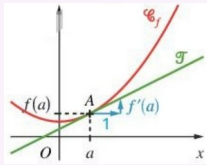
Le cours – 1^{ère} spé : fonctions dérivées

Équation de tangente :

Équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$f'(a)$ correspond au **coefficient directeur de la tangente**.



Dérivation des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Ensemble de définition	Fonction dérivée $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = mx + p$	\mathbb{R}	$f'(x) = m$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

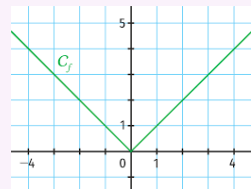
Opérations sur les fonctions dérivées :

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une somme	$u + v$	$u' + v'$
Dérivée d'un produit par une constante	ku	ku'
Dérivée d'un produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Dérivée d'un inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Composée exponentielle	e^u	$u' \times e^u$
Composée	$\frac{g(u)}{g(ax+b)}$	$\frac{u' \times g'(u)}{a \times g'(ax+b)}$

Fonction valeur absolue :

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -x & , \text{si } x \leq 0 \\ x & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction valeur absolue **n'est pas dérivable en 0**.



Les méthodes – 1^{ère} spé : Fonctions dérivées

Étudier la dérivabilité d'une fonction :

Soit a un nombre réel quelconque.

A l'aide du taux de variation, montrer que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en a puis retrouver l'expression de la dérivée de la fonction carré.

Solutions :

Pour étudier la dérivabilité de f en a , il faut tout d'abord s'intéresser aux taux de variation de f en a :

$$\tau_a = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

Lorsque h devient très proche de zéro, cette quantité se rapproche de $2a$ qui est un nombre fini. La fonction est donc dérivable en a et on a $f'(a) = 2a$.

Déterminer la fonction dérivée :

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1) $f(x) = 3x + 5$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$ 3) $f(x) = x^7$ 4) $f(x) = \sqrt{2}$ 5) $f(x) = -3 + 2x$

Solutions :

1) $f'(x) = 3$ 2) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 3) $f'(x) = 7x^6$ 4) $f'(x) = 0$ 5) $f'(x) = 2$

Déterminer la dérivabilité et la fonction dérivée :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) elle est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

1) $f(x) = 7x^2 - 5x$ 2) $g(x) = \frac{3}{x}$ 3) $h(x) = \frac{3x+1}{2x^2+5}$ 4) $m(x) = \sqrt{x}(6x^3-2)$

Solutions :

1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} . $f' = u' + v'$. $u(x) = 7x^2$, donc $u'(x) = 14x$ et $v(x) = -5x$, donc $v'(x) = -5$. On en déduit $f'(x) = 14x - 5$.

2) g est de la forme ku avec $k=3$ et $u(x) = \frac{1}{x}$. Donc g est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.

$$g'(x) = k u'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{3}{x^2}$$

3) h est un quotient de deux fonctions $u(x) = 3x+1$ dérivable sur \mathbb{R} et $v(x) = 2x^2+5$ dérivable sur \mathbb{R} , et, pour tout réel x , $v(x) \geq 5 > 0$, donc v ne s'annule pas. La fonction h est donc dérivable sur \mathbb{R} et $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. On obtient donc :

$$h' = \frac{3 \times (2x^2+5) - (3x+1) \times 4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15 - (12x^2+4x)}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15-12x^2-4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{-6x^2-4x+15}{(2x^2+5)^2}$$

4) h est le produit de deux fonctions $u(x) = \sqrt{x}$ dérivable sur $]0; +\infty[$ et $v(x) = 6x^3-2$ dérivable sur \mathbb{R} . On en déduit que m est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $m' = u'v + uv'$. On obtient donc :

$$m' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (6x^3-2) + \sqrt{x} \times 18x^2 = \frac{3x^3-1}{\sqrt{x}} + \frac{x \times 18x^2}{\sqrt{x}} = \frac{21x^3-1}{\sqrt{x}}$$

Le cours – 1^{ère} spé : Application dérivation

Prérequis : Dérivation locale, fonctions dérivées

Variations :

Si f est **croissante** sur I si et seulement si, $f'(x) \geq 0$ sur I .

f est **décroissante** sur I si et seulement si, $f'(x) \leq 0$ sur I .

f est **constante** sur I si et seulement si, $f'(x) = 0$ sur I .

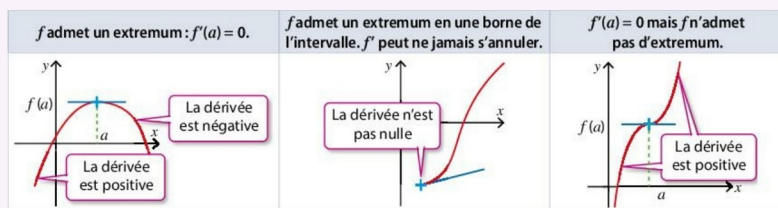
Exemple de tableau de variations :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ 10 ↘		

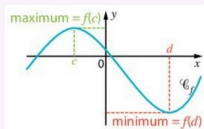
Extremums :

f admet un **maximum** sur I , atteint en c signifie $f(x) \leq f(c)$ sur I . $f(c)$ est le **maximum** de f sur I .

f admet un **minimum** sur I , atteint en c signifie $f(x) \geq f(c)$ sur I . $f(c)$ est le **minimum** de f sur I .



Si f' s'annule en changeant de signe en a , alors f admet un **extremum local** en a . La **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est alors **parallèle à l'axe des abscisses**.



Signe d'une fonction à partir de son tableau de variation :

Exemples :

x	a
$f(x)$	↗ 0 ↘
Signe de $f(x)$	- 0 +

x	a
$f(x)$	↘ négatif ↗
Signe de $f(x)$	-

Les méthodes – 1^{ère} spé : Application dérivation

Étudier les variations d'une fonction

On donne la fonction f définie sur $[-3; 3]$ par $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

- Déterminer l'expression de la dérivée de f et étudier son signe.
- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- En déduire les extremums de la fonction et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Solutions :

1) La dérivée de la fonction f a pour expression : $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$. f' est une fonction polynôme de degré 2. On étudie son signe :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25.$$

$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 5}{2 \times 2} = 2.$$

$a > 0$, donc f' est négative entre les racines, donc sur $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$, et positive à l'extérieur des racines, donc sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty[$.

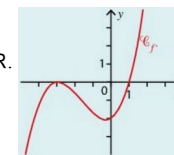
2) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-3	$-\frac{1}{2}$	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\frac{49}{2}$	$\nearrow \frac{37}{24}$	$\searrow -\frac{11}{3}$	$\nearrow -\frac{1}{2}$	

3) D'après le tableau de variation, le minimum de f est $-\frac{49}{2}$ atteint pour $x = -3$ et le maximum de f est $\frac{37}{24}$ atteint pour $x = -\frac{1}{2}$.

Utiliser la courbe représentative de f'

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction f admet des extremums.



Solutions :

Grace au graphique, nous pouvons déterminer le signe de f' et donc les variations de f . On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	↘ ↗				

f admet donc un minimum en 1. Les données ne nous permettent pas de déterminer la valeur de ce minimum.

Étudier la position relative de deux courbes

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4$ et $g(x) = 27x - 5$ et leurs courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g dans un repère. Montrer que le point $(1; 22)$ est commun aux deux courbes et déterminer la position relative de ces deux courbes.

Solutions :

$f(1) = -9 + 27 + 4 = 22$ et $g(1) = 27 - 5 = 22$ donc le point $(1; 22)$ est bien commun aux deux courbes.

Pour étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4 - 27x + 5 = -9x^3 + 27x^2 - 27x + 9 = -9(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -9(x-1)^3$$

$(x-1)^3$ est du signe de $x-1$, donc le signe de $-9(x-1)^3$ est du signe opposé à $x-1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-9(x-1)^3$		$+$	0 $-$

On en déduit que \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur $]-\infty; 1[$ et que \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g sur $]1; +\infty[$.

Exploiter les variations pour déterminer un signe

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 5x - 18$.

- 1) Démontrer que la fonction f est croissante sur \mathbb{R} .
- 2) Calculer $f(2)$ et en déduire le signe de $f(x)$.
- 3) Montrer que, pour tout $x \geq 2$, on a $x^3 \geq -5x + 18$.

Solutions :

- 1) $f'(x) = 3x^2 + 5$. Puisque $f'(x)$ est la somme de deux termes positifs, alors $f'(x)$ est positif. Donc f est croissante sur \mathbb{R} .
- 2) $f(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$. Puisque f est strictement croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que, pour $x \leq 2$, $f(x) \leq 0$ et que, pour $x \geq 2$, $f(x) \geq 0$.
- 3) D'après la question précédente, pour $x \geq 2$ on a $x^3 + 5x - 18 \geq 0$ soit $x^3 \geq -5x + 18$.

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – 1^{ère} spé : Fonction exponentielle

Définition :

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On note cette fonction $f(x) = \exp(x)$. On la note aussi $\exp(x) = e^x$.

On a ainsi $\exp(1) = e$. La valeur approchée de e est $e \approx 2,71828$

Fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur \mathbb{R} .

$$e^x > 0$$

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est (par définition)

$$(e^x)' = e^x$$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$		+
e^x		$+\infty$
	0	



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

(programme de terminale)

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

Résolution d'équations, inéquations :

exemples

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^{x+3} = e^2 \Leftrightarrow x+3=2 \dots$$

$$e^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} > e^0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \dots$$

Dérivée d'une composée :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

Les méthodes – 1^{ère} spé : Fonction exponentielle

Résolutions d'équations, inéquations :

Résoudre $e^{2x+3} = e^x$

$$e^{2x+3} = e^x$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = x$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

La solution est donc :

$$S = \{-3\}$$

Résoudre $2e^x + 5 = 7$

$$2e^x + 5 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

La solution est donc :

$$S = \{0\}$$

Résoudre $e^x - 1 \geq 0$

$$e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

L'astuce de remplacer 1 par e^0 est souvent utilisée

La solution est donc :

$$S = [0; +\infty[$$

Résoudre $\frac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$

$$\frac{e^{x+3} \times e^{2-x}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{(x+3)+(2-x)}}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^5}{e^{-x^2+3}} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow e^{5-(-x^2+3)} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+2} \geq e^6$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x^2-4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$$

Second degré à bien réviser !

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$		-	0	+
$x-2$		-	0	+
$(x-2)(x+2)$		+	0	+

Avec le tableau de signe, on trouve finalement $S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

Simplifications :

Simplifier le nombre $A = \frac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$

$$e = e^1$$

$$A = \frac{e \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{3x+3}}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^1 \times e^{2-2x} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3} \times e^{5x}}{e^{x-2}}$$

$$A = e^{(3x+3)-(x-2)}$$

$$A = \frac{e^{2-2x+1} \times (e^x)^5}{e^{x-2}}$$

$$A = \frac{e^{-2x+3+5x}}{e^{x-2}}$$

$$A = e^{2x+5}$$

Études de fonctions :

1) Étudier de la fonction $f(x) = x - e^x$ définie sur \mathbb{R} .

$f'(x) = 1 - e^x$. Pour étudier le signe de f' , on résout l'inéquation $1 - e^x \geq 0$:

$$1 - e^x \geq 0$$

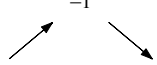
$$e^x \leq 1$$

$$e^x \leq e^0$$

$$x \leq 0$$

Donc $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 0]$. De même, $f'(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$.

On obtient donc le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1 		

2) Étudier de la fonction $f(x) = e^{-2x+3}$ définie sur \mathbb{R} .

f est de la forme $f(x) = e^u$.

On a donc $f'(x) = -2e^{-2x+3}$.

Or, $e^{-2x+3} > 0$, donc $-2e^{-2x+3} < 0$ sur \mathbb{R} .

Il y a souvent des signes "évidents" !

$f'(x) \leq 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Compléments fonctions et TVI

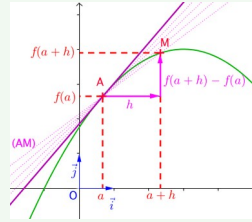
Prérequis : fonctions dérivées, application dérivation, fonction exponentielle

Nombre dérivé, tangente et continuité :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f'(a)$ est le **nombre dérivé en a**. Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



Continuité : f est **continue en a** si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la somme $f + g$, le produit $\lambda \times f$, le produit $f \times g$, f^n (ou n est un entier naturel non nul) et $f \circ g$ sont continus sur I . Si de plus g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continus sur I .

et $\frac{f}{g}$ sont continus sur I .

Une fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur cet intervalle.

Dérivées des fonctions composées :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Exemple : si $f(x) = 2x + 6$ et $g(x) = \sqrt{x}$, alors :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2x + 6} \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\sqrt{x} + 6$$

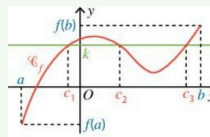
Attention aux ensembles de définition !

Fonction	Dérivée	Exemple
$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$	$f(x) = (2x + 6)^5$ $f'(x) = 5 \times 2 \times (2x + 6)^4 = 10(2x + 6)^4$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$f(x) = e^{x^2 + 1}$ $f'(x) = 2x \times e^{x^2 + 1}$
$(g \circ f)$	$f' \times (g' \circ f)$	

Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire :

Théorème des valeurs intermédiaires :

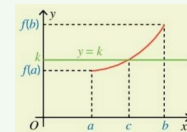
On considère la fonction f **définie** et **continue** sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f **définie**, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$, alors, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans l'intervalle $[a; b]$.



Les méthodes – T° spé : Compléments fonctions et TVI

Étude d'une fonction composée :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier les variations de f .

Solutions :

1) f est définie si $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$. Il nous faut donc étudier son signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	$+$	0	$+$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{2x}{3x+1}$	$+$	$-$	0	$+$

On en déduit que f est définie sur l'intervalle $D_f =]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]0; +\infty[$.

2) f est de la forme $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$. On a $u'(x) = \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$.

On en déduit : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} = \frac{1}{(3x+1)^2 \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} > 0$ sur D_f .

La fonction f est donc croissante sur son ensemble de définition.

Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires :

1) On considère la fonction g , définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a) Étudier le sens de variation de g . On donne les résultats suivants : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Dresser son

tableau de variation.

b) Calculer $g(3)$.

c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , que l'on notera α .

d) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée de α à 10^{-2} .

e) À l'aide des résultats précédents, établir le tableau de signe de $g(x)$.

2) f est la fonction définie, pour tout réel x différent de -1 et 1 par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

a) Démontrer que, pour tout réel x différent de -1 et de 1 : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$

Solution :

1) a) $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g		-1		$+\infty$	
	$-\infty$		-5		

b) $g(3)=14$

c) Sur $]-\infty; 1]$, le maximum de g est -1 . Donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante.

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right\} 0 \in]-5; +\infty[$$



D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $[1; +\infty[$, et donc dans \mathbb{R} .

d) A l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 2,10$. (On peut utiliser la fonction **G-Solv** \rightarrow **X-CAL** sur Casio)

e) Compte tenu des variations de g et des questions précédentes, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g	$-$	0	$+$

2) a) $f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(3x(x^2-1) - (2x^3+3))}{(x^2-1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

b) Le signe de f' dépend du signe de x et de $g(x)$ (trouvé au 1) e). On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$+\infty$		-3		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$f(\alpha)$

c) Nous savons que $g(\alpha)=0$. Donc $\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0$ et ainsi $\alpha^3 = 3\alpha + 3$.

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 3}{\alpha^2 - 1} = \frac{6\alpha + 9}{\alpha^2 - 1} = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$$

Étudier la continuité :

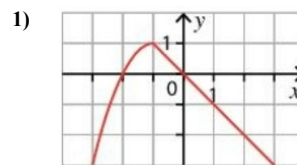
On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère.

2) Étudier la continuité de f :

- a) sur $]-\infty; -1]$ b) sur $]-1; +\infty[$ c) en -1

Solution :



2)

a) La fonction $x \rightarrow -x^2 - 2x$ est une fonction polynôme, donc elle est continue sur \mathbb{R} et donc sur $]-\infty; -1]$.

b) La fonction $x \rightarrow -x$ est une fonction affine, donc elle est continue sur \mathbb{R} et donc sur $]-1; +\infty[$.

c) Nous avons $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = 1$. Ensuite,

d'une part $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -x^2 - 2x = -(-1)^2 - 2 \times (-1) = 1$,

d'autre part $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -x = -(-1) = 1$.

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1) = 1$, donc f est continue en -1 .

Tangente et position relative :

On considère la fonction f , définie sur $[0; 6]$ par : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$.

1) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 4.

2) Démontrer que $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

3) En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente T .

Solution :

1) Pour déterminer l'équation de la tangente, nous avons besoin de f' : $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$.

$$f(4) = 4^3 - 12 \times 4^2 + 36 \times 4 = 16$$

$$f'(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 36 = -12$$

On a donc :

$$T: y = f'(4)(x-4) + f(4) = -12(x-4) + 16 = -12x + 64.$$

2) $f(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

Or, $(x-4)^3 = (x-4)^2 \times (x-4) = (x^2 - 8x + 16)(x-4) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

Nous avons donc bien $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

3) Pour étudier la position relative de \mathcal{C}_f et T , il nous faut étudier le signe de $f(x) - (-12x + 64)$:

$f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$. Le signe de $(x-4)^3$ est le même que celui de $x-4$:

x	0	4	6
$x-4$	$-$	0	$+$



Donc, sur $[0; 4]$, \mathcal{C}_f est située en dessous de T et sur $[4; 6]$, \mathcal{C}_f est située au dessus de T .

Le cours – T° spé : Limites de fonctions

Prérequis : [fonction exponentielle](#), [limites de suites](#), [compléments fonctions](#)

Les définitions :

➤ Les définitions des limites de fonctions en $+\infty$ sont équivalentes à celles des suites (voir [limites de suites](#)). On peut énoncer des définitions équivalentes en $-\infty$

➤ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en A si tout intervalle $]a; +\infty[$ (ou $]-\infty; b]$, a et b réels, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$).

➤ La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$)

➤ La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$

Limites des fonctions usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Opérations sur les limites, formes indéterminées et composition :

Les tableaux des opérations sur les limites sont les mêmes que pour les suites (voir [limites de suites](#)). Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

$$"(-\infty) \times (-\infty)" \rightarrow +\infty \quad " \frac{0^+}{-\infty} " \rightarrow 0^- \quad " \frac{3}{+\infty} " \rightarrow 0^+ \quad " \frac{+\infty}{0^-} " \rightarrow -\infty \quad " \frac{5}{0^+} " \rightarrow +\infty$$

Les 4 formes indéterminées à connaître par cœur :

$$"(+\infty) - (+\infty)" \quad "0 \times \infty" \quad " \frac{\infty}{\infty} " \quad " \frac{0}{0} "$$

Composition de fonctions :

a, b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont des fonctions.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

Théorèmes de comparaison et des gendarmes pour les fonctions identiques à ceux des suites (voir [limites de suites](#)). On a les théorèmes analogues en $-\infty$.

Croissances comparées pour la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, n \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, n \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Les méthodes – T° spé : Limites de fonctions

Étude asymptotique d'une fonction :

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les éventuelles asymptotes.

Limite en $+\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x-3 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{3}{x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est donc **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

Limite en $-\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x-3 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{3}{x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est donc **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$.

Limite en 3 à gauche :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} x+1 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x-3 = 0^- \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

Ici, il ne faut pas oublier le signe du 0. C'est lui qui détermine le signe de la limite !

Limite en 3 à droite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} x+1 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation $x = 3$ est donc **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f (à gauche et à droite).

Limites de fonctions composées :

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x^2+3}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2+3 = +\infty, \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^4+1}}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4+1 = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4+1} = 0. \quad \lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes :

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x \cos(x)$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$\cos(x)$ n'a pas de limite en $-\infty$. On ne peut donc pas calculer la limite de f directement avec les opérations.

Nous savons que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-e^x \leq e^x \cos(x) \leq e^x$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc **d'après le théorème des gendarmes**, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - \sin(x)$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. On ne peut donc pas calculer la limite de f directement avec les opérations.

Nous savons que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $x^2-1 \leq x^2-\sin(x) \leq x^2+1$. En particulier, $x^2-1 \leq x^2-\sin(x)$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2-1 = +\infty$, donc **d'après le théorème de comparaison**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Lever une indétermination en utilisant les croissances comparées :

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée au dénominateur}$$

$$f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x^2} = \frac{e^x(1+\frac{x}{e^x})}{e^x(1-\frac{x^2}{e^x})} = \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}$$

NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!

D'après le cours, nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ **donc que** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$. Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{e^x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{x^2}{e^x}) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = x e^{4x}$. Calculer la limites de f en $-\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} = 0 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous avons une forme indéterminée}$$

$f(x) = x e^{4x} = \frac{1}{4} \times 4x e^{4x}$. En posant $X = 4x$, nous avons $f(x) = \frac{1}{4} \times X e^X$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = -\infty$.

Or, d'après le cours, nous savons que $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$.

Nous pouvons en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

3) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. Calculer la limites de f en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous avons une forme indéterminée}$$

$f(x) = 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 2 \times \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}}$. En posant $X = \frac{1}{x}$, nous avons $f(x) = 2 \times \frac{e^X - 1}{X}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$.

Or, d'après le cours, nous savons que $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$.

Nous pouvons en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Logarithme népérien

Prérequis : [fonction exponentielle](#), [compléments fonctions](#), [limites de fonctions](#)

Premières propriétés :

Pour tout réel a **strictement positif**, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$
 Pour tout réel a , $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$
 Pour tout réel x **strictement positif**, $e^{\ln x} = x$
 Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$
 $\ln 1 = 0$ $\ln e = 1$ $\ln \frac{1}{e} = -1$

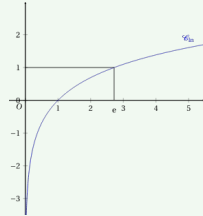
$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$
 $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$
 $x = e^{\ln x}$
 $8 = e^{\ln 8}$

Fonction logarithme :

La fonction logarithme népérien est **continue et dérivable** sur $]0; +\infty[$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$			+	
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Résolution d'équations, inéquations :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a \geq \ln b \Leftrightarrow a \geq b$$

$$\ln(x+3) = \ln(2) \Leftrightarrow x+3=2$$

$$\ln(2x+1) > \ln(2) \Leftrightarrow 2x+1 > 2$$

Tableau de signe :

x	0	1	$+\infty$	
Signe de $\ln(x)$		-	0	+

Dérivée d'une composée :

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I .

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Relation fonctionnelle et propriétés algébriques :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln(a^p) = p \ln a$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x(x+1))$$

$$\ln(x+3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\ln(0,6^n) = n \ln(0,6)$$

$$\ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \ln(3)$$

Limites et croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Les méthodes – T° spé : Logarithme népérien

Résolutions d'équations, inéquations :

Résoudre $\ln(2x+3) = \ln(x)$

$$\ln(2x+3) \text{ existe si } 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$\ln(x) \text{ existe si } x > 0$$

Le domaine de validité est $D =]0; +\infty[$.

Sur ce domaine :

$$\ln(2x+3) = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = x$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

$-3 \notin D$, donc l'équation n'a pas de solution.

Résoudre $2\ln(x) + 1 = 7$

Le domaine de validité est $D =]0; +\infty[$.

Sur ce domaine :

$$2\ln(x) + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x) = 6$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3$$

$e^3 \in D$, donc la solution est :

$$S = \{e^3\}$$

Résoudre $e^{x-3} > 5$

$$e^{x-3} > 5$$

$$\Leftrightarrow x-3 > \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow x > \ln(5) + 3$$

La solution est donc :

$$S =]\ln(5) + 3; +\infty[$$

Résoudre $\ln(x+3) + \ln(2-x) \geq \ln(6)$

$$\ln(x+3) \text{ existe si } x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Le domaine de validité est $D =]-3; 2[$.

Sur ce domaine :

$$\ln(x+3) + \ln(2-x) \geq \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow \ln((x+3)(2-x)) \geq \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(2-x) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 6 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \leq 0$$

x	-3	-1	0	2	
x	-	:	-	0	+
$x+1$	-	0	+	:	+
$x(x+1)$	+	0	-	0	+

Avec le tableau de signe, on trouve finalement $S = [-1; 0]$

Résoudre $0,9^n \leq 0,1$, $n \in \mathbb{N}$

$$0,9^n \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,9^n) \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,9) \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \quad \text{car } \ln(0,9) < 0$$

Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,85$. Comme $n \in \mathbb{N}$, la solution est

finalement $n \geq 22$.

Résoudre $x^{2,7} = 64$, $n \in \mathbb{N}$

$$x^{2,7} = 64$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^{2,7}) = \ln(64)$$

$$\Leftrightarrow 2,7 \times \ln(x) = \ln(64)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(64)}{2,7}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(64)}{2,7}}$$

La solution est donc $S = \left\{ e^{\frac{\ln(64)}{2,7}} \right\}$

Simplifications :

Simplifier le nombre $A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$$A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$A = 3 + \ln(e^2) - 2 \ln(\sqrt{e})$$

$$A = 3 + 2 - 2 \times \frac{1}{2} \ln(e)$$

$$A = 3 + 2 - 1 = 4$$

Études de fonctions :

1) Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = x^2 - \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$.

Limite en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par somme, nous obtenons :} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$:

Par somme, nous avons une **forme indéterminée**. En factorisant par x^2 nous obtenons :

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ d'après le cours. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Donc, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Variations :

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$. Sur $]0; +\infty[$, f' est donc du signe de $2x^2 - 1$ (signe simple d'un polynôme du 2nd degré) :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x+4}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Calculer $g'(x)$

a) g est définie si $\frac{x+3}{-x+4} > 0$. Nous étudions donc le signe de $\frac{x+3}{-x+4}$:

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$-x+4$	+	+	0	-
$\frac{x+3}{-x+4}$	-	0	+	-

L'ensemble de définition de g est donc $D_g =]-3; 4[$

b) g est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = \frac{x+3}{-x+4}$. Nous avons donc

$$u'(x) = \frac{-x+4 - (-1)(x+3)}{(-x+4)^2} = \frac{-x+4+x+3}{(-x+4)^2} = \frac{7}{(-x+4)^2}$$

$$\text{Ainsi, } g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{7}{(-x+4)^2}}{\frac{x+3}{-x+4}} = \frac{7}{(-x+4)^2} \times \frac{-x+4}{x+3} = \frac{7}{(-x+4)(x+3)}$$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Primitives

Équation différentielle et primitive :

Une **équation différentielle du 1^{er} ordre** est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable y , sa dérivée y' et la variable x . **L'inconnue de cette équation est la fonction y .**

Exemples d'équations différentielles :

$$y' = x^3 + 1 \qquad xy' + 2y = e^x \qquad 2y' - y = 1$$

Toute fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = f$ s'appelle une **primitive** de f sur I .

Une fonction F est une primitive de f sur I si, pour tout réel x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Si F est une primitive de f sur I , alors, pour tout réel k , la fonction $G(x) = F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I .
Une fonction continue sur I admet donc **une infinité de primitives** sur I .

Tableaux des primitives :

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ pour n entier différent de -1 et 0	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	• \mathbb{R} lorsque $n > 0$ • $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ lorsque $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	\mathbb{R}

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	u et v dérivables sur I
$\lambda u'$, avec λ réel	λu	
u^n , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si n est négatif, alors $u(x) \neq 0$ pour tout x de I .
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	\sqrt{u}	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	pour $u(x) \neq 0$
$u'e^u$	e^u	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v dérivable sur un intervalle J et, pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J

Les méthodes – T° spé : Primitives

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle :

Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 4$ pour x réel.

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de cette équation.

Solution :

Calculons en premier lieu f' : $f'(x) = 2e^{2x}$.

Nous avons donc : $f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 2(e^{2x} - 2) = 2e^{2x} - 2e^{2x} + 4 = 4$.

f est donc bien une solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 4$.

Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction :

Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = (x-1)e^x$.

a) Montrer que g est une primitive de f sur \mathbb{R} .

b) En déduire toutes les primitives de f sur \mathbb{R} .

Solution :

a) g est une primitive de f si $g'(x) = f(x)$. Nous calculons donc la dérivée de g :

g est de la forme $g(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (x-1)$ et $v(x) = e^x$.

Donc $g'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x = f(x)$.

g est bien une primitive de f .

b) On en déduit l'ensemble des primitives de f : $F(x) = g(x) + k = (x-1)e^x + k$

Calculs de primitives :

Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 9$ b) $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}$ c) $h(x) = 6x(x^2 - 1)^3$

d) $i(x) = \frac{5}{2x+3}$ e) $k(x) = 3e^{2x+1}$

Solution :

a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x$

b) $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{1}{x} - 4x^{-3}$, donc $G(x) = \ln(x) - 4 \times \frac{x^{-2}}{-2} = \ln(x) + 2x^{-2} = \ln(x) + \frac{2}{x^2}$

c) $h(x) = 6x(x^2 - 1)^3 = 3 \times 2x(x^2 - 1)^3$, donc h est de la forme $h(x) = 3u'u^3$. Nous avons ainsi :

$$H(x) = 3 \times \frac{(x^2 - 1)^4}{4} = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^4$$

d) $i(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{2x+3}$, donc i est de la forme $i(x) = \frac{5}{2} \times \frac{u'}{u}$. Nous avons ainsi :

$$I(x) = \frac{5}{2} \ln(|2x+3|)$$

e) $k(x) = 3e^{2x+1} = \frac{3}{2} \times 2e^{2x+1}$, donc k est de la forme $k(x) = \frac{3}{2} \times u'e^u$. Nous avons ainsi :

$$K(x) = \frac{3}{2} e^{2x+1}$$

Détermination de la constante :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 5$.

Solution :

f est de la forme $f(x) = \frac{u'}{u}$. L'ensemble des primitives de f sont donc : $F_k(x) = \ln(e^x+1) + k$ ($e^x+1 > 0$). Nous cherchons la primitive qui est telle que $F_k(0) = 5 \Leftrightarrow \ln(e^0+1) + k = 5 \Leftrightarrow \ln(2) + k = 5 \Leftrightarrow k = 5 - \ln(2)$. La primitive recherchée est donc :

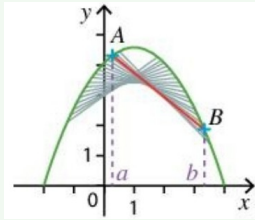
$$F(x) = \ln(e^x+1) + 5 - \ln(2)$$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

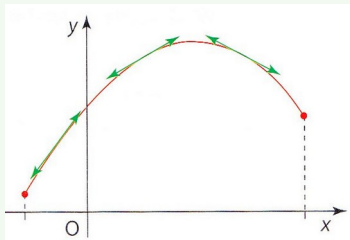
Fonction concave

Définition :

La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe située entre les points $A(a; f(a))$ $B(b; f(b))$ est **au-dessus de la sécante (AB)**.



La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située **en-dessous de chacune de ses tangentes**.



Lien avec la fonction dérivée f' :

La fonction f est **concave** sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée **f' est décroissante** sur I .

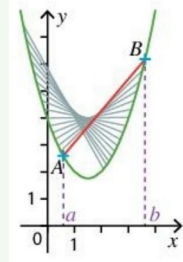
Lien avec la fonction dérivée seconde f'' :

La fonction f est **concave** sur I si, et seulement si, pour tout réel $x \in I$, **$f''(x) \leq 0$** .

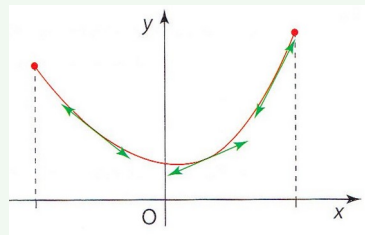
Fonction convexe

Définition :

La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe située entre les points $A(a; f(a))$ $B(b; f(b))$ est **en-dessous de la sécante (AB)**.



La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située **au-dessus de chacune de ses tangentes**.



Lien avec la fonction dérivée f' :

La fonction f est **convexe** sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée **f' est croissante** sur I .

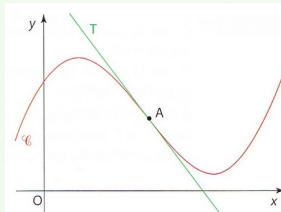
Lien avec la fonction dérivée seconde f'' :

La fonction f est **convexe** sur I si, et seulement si, pour tout réel $x \in I$, **$f''(x) \geq 0$** .

Point d'inflexion :

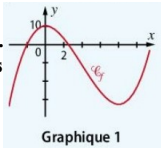
Un **point d'inflexion** d'une courbe est un point en lequel la courbe traverse la tangente.

Le point A d'abscisse a est un **point d'inflexion** de la courbe C_f si, et seulement si, la dérivée seconde **f'' s'annule en a en changeant de signe**.



Lecture graphique :

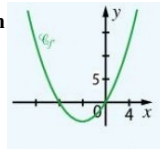
1) On donne sur le graphique 1 la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et les intervalles sur lesquels elle est concave.



Solution :

Par lecture graphique, f est concave sur $]-\infty; 4]$ et convexe sur $]4; +\infty[$.

2) On donne sur le graphique 2 la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et concave.



Solution :

f est concave lorsque sa dérivée est décroissante soit sur l'intervalle $]-\infty; -4]$.
 f est convexe lorsque sa dérivée est croissante, soit sur l'intervalle $]-4; +\infty[$.

Étude de convexité :

1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$ et on note C_f sa courbe représentative.

- a) Étudier la convexité de f .
- b) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
- c) En déduire que quel que soit le réel x : $e^x \geq x+1$

Solution :

- a) $f''(x) = f'(x) = e^x > 0$, donc f est convexe sur \mathbb{R} .
- b) $T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = x+1$
- c) La fonction f est convexe sur \mathbb{R} . Sa courbe représentative est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur \mathbb{R} . Elle est, en particulier, au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où $e^x \geq x+1$

2) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et on note C_f sa courbe représentative.

- a) Étudier la convexité de f .
- b) Déterminer une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
- c) En déduire que quel que soit le réel x de $]0; +\infty[$: $\sqrt{1+x} \leq 1+0,5x$

Solution :

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, et $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$
 Sur $]0; +\infty[$, $\sqrt{1+x} \geq 0$, $1+x \geq 0$, donc $f''(x) \leq 0$ et f est concave.

b) $T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x+1$

c) La fonction f est concave sur $]0; +\infty[$. Sa courbe représentative est donc en-dessous de toutes ses tangentes sur $]0; +\infty[$. Elle est, en particulier, en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, d'où $\sqrt{1+x} \leq 1+0,5x$

3) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tout réels a et b : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$

Solution :

Soit les points $A(a; e^a)$ $B(b; e^b)$. La fonction exponentielle étant convexe, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe représentative de la fonction exponentielle. En particulier, le milieu de ce segment de coordonnées $(\frac{a+b}{2}, \frac{e^a + e^b}{2})$ est au-dessus du point de la courbe ayant la même abscisse $(\frac{a+b}{2}; e^{\frac{a+b}{2}})$. On a donc $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

