Le cours – 1ère spé : Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle :

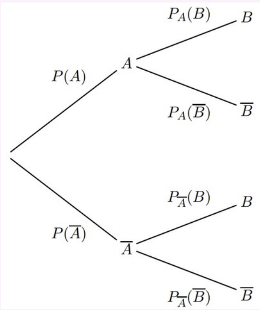
Soit A et B deux événements avec $P(A)\neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$$

$$0\leq P_A(B)\leq 1,\ P_A(\overline{B})=1-P_A(B)$$

Arbres pondérés et tableaux :



	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Formule des probabilités totales :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une **partition de l'univers**, alors $P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\ldots+P(A_n\cap B)$

Cas particulier de 2 événements :

Si A et $\overline{A}$ constituent une **partition de l'univers**, alors :

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$$

Événements indépendants :

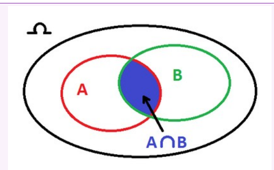
On dit que deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

On a alors $P_A(B)=P(B)$ et $P_B(A)=P(A)$. Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Probabilité de l'union :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



Les méthodes – 1ère spé : Probabilités conditionnelles

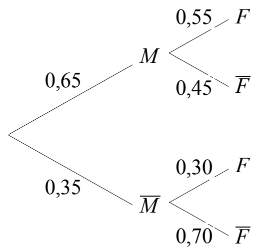
Utiliser un arbre pondéré :

Dans un restaurant, 65 % des clients viennent déjeuner le midi, le reste vient le soir. Parmi les clients du midi, 55 % commandent une formule entrée-plat-dessert, contre 30 % pour les clients du soir.
On note :
F l'évènement "le client commande une formule entrée-plat-dessert".
M l'évènement "le client vient le midi"
1) Comment note-t-on l'évènement "le client vient le soir" ?
2) Construire un arbre de probabilités avec les données
3) Traduire par une phrase l'évènement $F\cap M$ et calculer sa probabilité.
4) Montrer que le probabilité de F est 0,4625.
5) Un client a commandé une formule entrée-plat-dessert. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il soit un client du midi ?

Solution :

1) l'évènement "le client vient le soir" se note $\overline{M}$.

2)



3) $F\cap M$ est l'évènement "le client vient le midi et commande une formule entrée-plat-dessert"

$P(F\cap M)=P(M)\times P_M(F)=0{,}65\times 0{,}55=0{,}3575$.

4) M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :
$P(F)=P(M\cap F)+P(\overline{M}\cap F)$
$=P(M)\times P_M(F)+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(F)$
$=0{,}65\times 0{,}55+0{,}35\times 0{,}30=0{,}4625$

5) Nous recherchons $P_F(M)$. Avec la formule du cours, nous avons :
$P_F(M)=\dfrac{P(F\cap M)}{P(F)}=\dfrac{0{,}3575}{0{,}4625}\approx 0{,}773$.

Évènements indépendants :

1) Dans chacun des cas, dire si les évènements A et B sont indépendants :
a) $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$.
b) $P(A)=0{,}4$, $P_A(B)=0{,}4$ et $P_B(A)=0{,}7$.

Solution :

a) $P(A)\times P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$. On a $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$. Donc les évènements A et B sont indépendants.

b) $P(A)\neq P_B(A)$, donc les évènements ne sont pas indépendants.

2) Soient A et B deux évènements indépendants tels que $P(A)=0{,}3$ et $P(B)=0{,}8$. Calculer $P(A\cap B)$.

Solution :

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}3\times 0{,}8=0{,}24$

Utiliser un tableau :

On donne le tableau suivant où A et B sont deux évènements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire :

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,32		
$\overline{A}$		0,2	0,36
Total			

1) Compléter le tableau en justifiant.
2) Calculer $P_A(B)$.
3) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Solution :

1) $P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}36 - 0{,}2 = 0{,}16$
$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = 0{,}32 + 0{,}16 = 0{,}48$
$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$
$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0{,}64 - 0{,}32 = 0{,}32$

On a donc :

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,32	0,32	0,64
$\overline{A}$	0,16	0,2	0,36
Total	0,48	0,52	1

2) $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}32}{0{,}64} = 0{,}5$.

3) $P(B) \neq P_A(B)$, donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :

Le cours – 1ère spé : Variables aléatoires

Un exemple simple pour comprendre :

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat." L'ensemble de toutes les **issues** possibles $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle **l'univers** des possibles.
On considère **l'événement** A : "On obtient un résultat pair." On a donc : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
On considère **l'événement élémentaire** E : "On obtient un 3". On a donc : $E = \{3\}$.

On considère maintenant le jeu suivant :
- Si le résultat est pair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 1, on gagne 3€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur Ω qui peut prendre les 3 valeurs $x_1=2$, $x_2=3$ ou $x_3=-4$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (les 3 chiffres pairs). On la note : $P(X=2)=\frac{1}{2}$. De même, $P(X=3)=\frac{1}{6}$ et $P(X=-4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

On obtient la **loi de probabilité de** X :

x_i	2	3	- 4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{3}\times(-4)=1+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$$
$$V(X)=\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\times\left(3-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left((-4)-\frac{1}{6}\right)^2\approx 8{,}806$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx 2{,}967$$

Le cours :

Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans ℝ. Elle associe un nombre à des évènements.

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X=x_i)$.
On la résume souvent dans un tableau. :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

La somme des p_i est toujours égale à 1

- **L'espérance** mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(X)=p_1\times x_1+p_2\times x_2+p_3\times x_3+\dots+p_n\times x_n=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$$

- **La variance** de la loi de probabilité de X est :

$$V(X)=p_1\times(x_1-E(X))^2+p_2\times(x_2-E(X))^2+p_3\times(x_3-E(X))^2+\dots+p_n\times(x_n-E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E(X))^2$$

- **L'écart-type** de la loi de probabilité de X est : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Les méthodes – 1ère spé : Variables aléatoires

Exercices n°1 :

On organise un tombola dans un village. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus. L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 620€, neuf billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 70€, cinquante billets sont remboursés, et les autres sont perdants. Les billets sont vendus 5€.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe la somme d'argent gagnée (comptée positivement) ou perdue (comptée négativement).
1) Donner les différentes valeurs prises par X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X et donner une interprétation du résultat obtenu.

Solution :

1) Les valeurs prises par X sont -5, 0, 65 et 615.
2) Loi de probabilité de X :

x_i	- 5	0	65	615
$P(X=x_i)$	$\frac{440}{500}$	$\frac{50}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

3) $E(X)=\frac{440}{500}\times(-5)+\frac{50}{500}\times 0+\frac{9}{500}\times 65+\frac{1}{500}\times 615=-2$

On peut en conclure qu'en moyenne, les participants perdent 2€. Le village peut espérer gagner $500\times 2=1000$ €.

Exercices n°2 :

On considère un jeu pour lequel la probabilité de gagner est de $\frac{3}{7}$. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul. Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est à dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
1) Déterminer la loi de probabilité de G.
2) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

Solution :

1) On a $P(G=10-k)=\frac{3}{7}$ et $P(G=-k)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$. On a donc la loi de probabilité :

g_i	- k	10 - k
$P(G=g_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

2) L'espérance mathématique de la variable G est égale à

$$E(G)=\frac{4}{7}\times(-k)+\frac{3}{7}\times(10-k)=\frac{-4k+30-3k}{7}=\frac{30-7k}{7}.$$

Le jeu est favorable au joueur si :

$$E(G)>0 \Leftrightarrow \frac{30-7k}{7}>0 \Leftrightarrow 30-7k>0 \Leftrightarrow 7k<30 \Leftrightarrow k<\frac{30}{7}\approx 4{,}3$$

La somme payée au départ doit être inférieure à 4,3. Elle ne doit donc pas dépasser 4€ afin que le jeu reste favorable au joueur.

Le cours – T° spé : Dénombrement

Dans ce résumé de cours, nous considérerons pour les exemples les deux ensembles : $E_1=\{1;2;3;4\}$ et $E_2=\{a;b;c\}$.
Nous avons donc $Card(E_1)=n_1=4$ et $Card(E_2)=n_2=3$

Principe additif (cardinal de l'union)	Soit E_1 et E_2 deux ensembles finis **disjoints**. Le nombre d'éléments de la réunion $E_1\cup E_2$ est $\boldsymbol{Card(E_1\cup E_2)=Card(E_1)+Card(E_2)}$.	$E_1\cup E_2=\{1;2;3;4;a;b;c\}$ $Card(E_1\cup E_2)=n_1+n_2=7$
Produit cartésien	Le produit cartésien $E_1\times E_2$ est l'ensemble des **couples** (e_1,e_2) où $e_1\in E_1$ et $e_2\in E_2$. Le produit cartésien $E_1\times E_2\times\ldots\times E_k$ est l'ensemble des **k-uplets** $(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ où $e_1\in E_1$ et $e_2\in E_2\ldots$ $e_k\in E_k$. Le produit cartésien $E_1{}^k$ est l'ensemble des **k-uplets** $(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ où $e_1,e_2,\ldots,e_k\in E_1$	$E_1\times E_2=\{(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);\ldots;(3,c)\}$ $E_1^3=\{(1,1,1);(1,1,2);(1,1,3);\ldots;(4,4,4)\}$
Principe multiplicatif (cardinal du produit cartésien)	Soit E_1 et E_2 deux ensembles. Le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1\times E_2$ est $\boldsymbol{Card(E_1\times E_2)=Card(E_1)\times Card(E_2)}$. Généralisable à k ensembles.	$Card(E_1\times E_2)=n_1\times n_2=4\times 3=12$ $Card(E_1{}^3)=n_1^3=4^3=64$ (nombre de 3-uplets de E_1)
Parties d'un ensemble	Une partie d'un ensemble E est un ensemble d'éléments de E. L'ensemble des parties de E contient toujours $\emptyset$ et E. Le nombre de parties de E est $\boldsymbol{2^{Card(E)}}$.	Exemples de parties de E_1 : $\emptyset$; $\{1\}$; $\{1;2;4\}$; $\{2;3\}$… il y a $2^{n_1}=2^4=16$ parties de E_1.
Nombre de k-uplets de E (répétitions possibles, l'ordre est important)	Soit E un ensemble. Le nombre de k-uplets de E est $\boldsymbol{(Card(E))^k}$	Exemples de 5-uplets de E_2 : (a,a,b,a,c) ; (a,b,c,a,b) ; (b,b,a,c,c)… Il y en a $3^5=243$ en tout.
Nombre de k-uplets d'éléments distincts de E (pas de répétition, l'ordre est important)	Soit E un ensemble avec $Card(E)=n$. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est $\boldsymbol{\dfrac{n!}{(n-k)!}}$	Exemples de 3-uplets d'éléments distincts de E_1 : (1,2,3) ; (3,2,1) ; (4,1,3)… Il y en a en tout : $\dfrac{4!}{(4-3)!}=\dfrac{4!}{1!}=4!=1\times2\times3\times4=24$
Nombre de permutations (n-uplets d'éléments distincts) (pas de répétition, l'ordre est important, tous les éléments)	Soit E un ensemble avec $Card(E)=n$. Le nombre de permutations de E est $\boldsymbol{n!}$	Exemples de permutations de E_1 : (1,2,3,4) ; (2,1,3,4) ; (4,3,2,1)… Il y en a $4!=1\times2\times3\times4=24$ en tout.
Nombre de combinaisons (pas de répétition, l'ordre ne compte pas, k éléments de E)	Une combinaison de k éléments de E est une partie de E à k éléments. La nombre de combinaisons de k éléments de E est $\boldsymbol{\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$ $(n=Card(E))$	Exemples de combinaisons de 3 éléments de E_1 : $\{1;2;3\}$; $\{1;2;4\}$; $\{2;3;4\}$… Il y en a $\binom{4}{3}=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$ en tout

Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ Exemple : $\binom{10}{9}=\binom{10}{1}$

Somme des coefficients binomiaux (nombre de parties) : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Relation de Pascal : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

k→	0	1	2	3	4	5	6	7
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3+3		1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

Les méthodes – T° spé : Dénombrement

Quelques exemples :

1) Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matchs aller-retour (phase régulière) passent à la deuxième phase du championnat. Combien de **classements** composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?

Solution :
Il n'y a pas de répétition et l'ordre des 6 premières équipes est important. Il s'agit donc du nombre de 6-uplets d'éléments distincts de l'ensemble des 14 équipes. Il y a donc $\dfrac{14!}{(14-6)!}=\dfrac{14!}{8!}=2162160$ classements possibles.

2) Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP 14 sont possibles ?

Solution :
Il s'agit du nombre de permutations des 14 équipes. Il y a donc $14!=87178291200$ classements possibles.

3) On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main » de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.
a) Combien de « mains » de 4 cartes peut-on alors former ?
b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?

Solution :
a) L'ordre n'importe pas et il ne peut pas avoir répétition. Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 cartes parmi les 32. Il y a donc $\binom{32}{4}=\dfrac{32!}{4!(32-4)!}=35960$ mains possibles.
b) Il n'y a qu'une main possible contenant les 4 as, la probabilité est donc $p=\dfrac{1}{35960}$.

4) Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de jorki (ou football à 5). Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?

Solution :
Hugo et Kylian sont placés dans l'équipe. Il faut ensuite compléter l'équipe avec 3 personnes parmi les 8 amis restants. L'ordre n'importe pas, il s'agit donc du nombre de combinaisons des 3 amis parmi les 8. Il y a donc $\binom{8}{3}=\dfrac{8!}{3!(8-3)!}=56$ équipes possibles.

5) Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?

Solution :
Il peut y avoir répétition des chiffres et l'ordre est important. Il s'agit donc du nombre de 4-uplets de l'ensemble des chiffres (de 0 à 9). Il y a donc $10^4=10000$ codes PIN différents.

Le cours – T° spé : Loi binomiale

Prérequis : Proba conditionnelles, variables aléatoires, dénombrement

Épreuve de Bernoulli :

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues** que l'on peut nommer **"succès"** ou **"échec"**.

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1-p$.

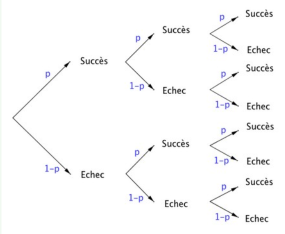
p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

La **variable aléatoire** qui prend la valeur **1** en cas de succès et **0** en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli.

Loi binomiale :

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.



Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, associe **le nombre de succès** au cours de ces n épreuves.
La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**.
On la note $\mathcal{B}(n,p)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

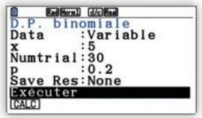
$$E(X)=n\times p \qquad V(X)=np(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

Calculatrice :

Taper sur MENU et choisir le menu Statistique et DIST (F5) puis BINOMIAL (F5).

Calculer $P(X=k)$:

Pour calculer $P(X=5)$ sélectionner Bpd (F1) puis dans **Data**, écrire Variable (F2), dans **x** écrire k (ici 5), dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).



Taper sur EXE pour obtenir : D.P. binomiale p=0.17227918

Calculer $P(X\leqslant k)$:

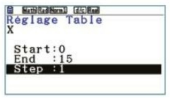
Pour calculer $P(X\leqslant 8)$, sélectionner Bcd (F2) puis dans **Lower**, écrire 0, dans **Upper**, écrire k (ici 8) dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).

Taper sur EXE pour obtenir : D.C. binomiale p=0.87134924

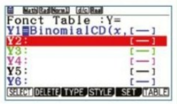
Appuyer sur la touche **MENU**, sélectionner le menu **Table**, puis suivre les instructions suivantes :

1 Dans **Y1**, saisir **BinomialCD(X,15,0.3)** Suivi de EXE. L'instruction **BinomialCD** se trouve de la façon suivante : **OPTN** puis ▷ F6 puis **STAT** F3 puis **DIST** F1 puis **BINOMINAL** F5 et enfin **Bcd** F2.

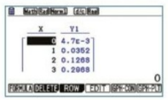
2 Choisir **SET** F5, puis entrer la première **Start** et la dernière valeur **End:** de k, ainsi que le pas, suivi de EXE.



3 Choisir **TABL**(touche F6).



4 Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche ↓ du pavé directionnel.



Remarque : pour un tableau des valeurs $P(X=k)$, on utilise l'instruction **BinomialPD(Bpd)**.

Les méthodes – T° spé : Loi binomiale

Calculs de probabilités avec la loi binomiale :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}25$.
1) Calculer $P(X=0)$ et $P(X=7)$.
2) Calculer $P(X\leqslant 1)$ et $P(X\leqslant 6)$.
3) Calculer $P(X>1)$ et $P(X\geqslant 4)$.
4) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution :

1) $P(X=0)=\binom{10}{0}0{,}25^0(1-0{,}25)^{10}=0{,}75^{10}\approx 0{,}056$.

$P(X=7)=\binom{10}{7}0{,}25^7(0{,}75)^3\approx 0{,}003$ avec la calculatrice : **BinomialPD(7,10,0.25)**

2) $P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{10}{0}0{,}25^0(1-0{,}25)^{10}+\binom{10}{1}0{,}25^1(1-0{,}25)^9\approx 0{,}244$.

$P(X\leqslant 6)\approx 0{,}996$ avec la calculatrice : **BinomialCD(6,10,0.25)**

3) $P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-(P(X=0)+P(X=1))\approx 0{,}756$.
$P(X\geqslant 4)=1-P(X\leqslant 3)\approx 0{,}224$ avec la calculatrice : **1 - BinomialCD(3,10,0.25)**

4) $E(X)=n\times p=10\times 0{,}25=2{,}5$. $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{10\times 0{,}25\times 0{,}75}\approx 1{,}369$

Calcul d'un seuil :

On commande n casques d'une certaine marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. La probabilité qu'un casque présente un défaut de conception est 0,036. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.
1) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2) Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur ou égale à 0,99 ?

Solution :

1) Il y a répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise). Le succès est "le casque a un défaut de conception" et sa probabilité est $p=0{,}036$. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans le lot. Donc X suit bien une loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}036$.

2) Nous cherchons n tel que $P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99$.

$P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99$
$1-P(X=0)\geqslant 0{,}99$
$-P(X=0)\geqslant -0{,}01$
$P(X=0)\leqslant 0{,}01$
$\binom{n}{0}0{,}036^0(1-0{,}036)^n\leqslant 0{,}01$
$0{,}964^n\leqslant 0{,}01$
$\ln(0{,}964^n)\leqslant \ln(0{,}01)$
$n\times\ln(0{,}964)\leqslant \ln(0{,}01)$
$n\geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)}$
$n\geqslant 125{,}6$ donc $n\geqslant 126$. Il faut donc commander au minimum 126 casques

Détermination d’un seuil avec la calculatrice :

Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est de 3 %. On prélève un échantillon de 200 gélules. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200.

1) Quelle est la loi suivie par X ?
2) Déterminer le plus petit entier b tel que : $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}9$.

Solution :

1) Il y a répétition de 200 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le succès est "la gélule est non commercialisable" et sa probabilité est $p=0{,}03$. X est la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0{,}03$.

2) Avec le menu table de la calculatrice, on obtient : (on tape dans Y1 : **BinomialCD(X,200,0.03)**)

$P(X \leqslant 7)$	0,746
$P(X \leqslant 8)$	0,850
$P(X \leqslant 9)$	0,919

La valeur de b recherchée est donc $b = 9$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :