

Trois définitions d'une suite :

Définition par récurrence

$$\begin{cases} \text{un terme donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

calcul d'un terme à partir du précédent

exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Définition explicite

$$u_n = f(n)$$

calcul direct de chaque terme

exemple :

$$u_n = 6n + 8$$

Définition avec un algorithme

```
U=2
n=0
for i in range(4):
    U=U+5
    n=n+1
    print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

```
pour n = 1 U = 7
pour n = 2 U = 12
pour n = 3 U = 17
pour n = 4 U = 22
>>>
```

avec une boucle for ou while

Variations d'une suite :

- La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Étude des variations d'une suite :

Méthode n°1 (à privilégier) :

On compare u_{n+1} et u_n en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Méthode n°2 (quand on a des puissances de n) :

On compare u_{n+1} et u_n en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

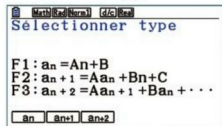
Méthode n°3 (SEULEMENT pour les suites définies EXPLICITEMENT) :

Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

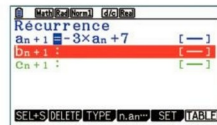
Suites avec la calculatrice :

1 Sélectionner le mode Récurrence.

Si l'écran obtenu ne permet pas d'exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , appuyer sur $\left[\text{F3} \right]$ pour sélectionner le « Type » de suite, puis sur $\left[\text{F2} \right]$ pour sélectionner a_{n+1} .

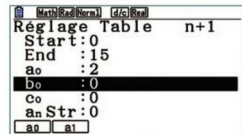


2 Renseigner l'écran comme ci-dessous : a_n est obtenu en appuyant sur la touche $\left[\text{F2} \right]$ pour sélectionner $n \cdot a_n \dots$, puis sur la touche $\left[\text{F2} \right]$. Appuyer sur **EXE**.



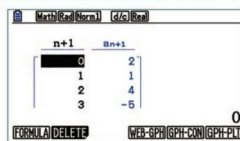
3 Accéder au menu

SET en appuyant sur la touche $\left[\text{F5} \right]$ puis renseigner les indices des premier et dernier termes calculés ainsi que la valeur du premier terme. Appuyer sur **EXE**.



4 Appuyer sur la

touche **EXIT** puis $\left[\text{F6} \right]$ pour obtenir le tableau des valeurs des termes de (u_n) :



Calculer des termes :

Suite définie par récurrence

exemple n°1 :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$u_2 = 2 \times 7 + 3 = 17$$

$$u_3 = 2 \times 17 + 3 = 37$$

...

exemple n°2 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3n \end{cases}$$

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = u_0 + 3 \times 0 = 0$$

$$u_2 = u_1 + 3 \times 1 = 0 + 3 = 3$$

$$u_3 = u_2 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9$$

...

Suite définie explicitement

exemple n°1 :

$$u_n = 6n + 8, n \geq 0$$

$$u_0 = 6 \times 0 + 8 = 8$$

$$u_1 = 6 \times 1 + 8 = 14$$

$$u_2 = 6 \times 2 + 8 = 20$$

...

$$u_{50} = 6 \times 50 + 8 = 308$$

...

exemple n°2 :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

$$u_n = f(n), n \geq 0$$

$$u_0 = f(0) = 3$$

$$u_1 = f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_2 = f(2) = \frac{5}{3}$$

...

Suite définie avec un algorithme

exemple :

```
U=2
n=0
for i in range(10):
    U=U+5
    n=n+1
    print("pour n = ",n,"U = ",U)
```

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$u_2 = u_1 + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$u_3 = u_2 + 5 = 12 + 5 = 17$$

...

Étude de la monotonie d'une suite :

exemple n°1 :

Soit $u_n = \frac{n+2}{n+1}, n \geq 0$. Etudier les variations de la suite (u_n) .

Solution :

Avec la méthode n°1 :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+2}{n+1+1} - \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(n^2+n+3n+3) - (n^2+4n+4)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \leq 0$$

On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et ainsi $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

exemple n°2 :

Soit $u_n = 2^n, n \geq 0$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution :

Avec la méthode n°2 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2 \geq 1$$

On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et ainsi

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

exemple n°3 :

Soit $u_n = \frac{8n-4}{n+1}, n \geq 0$. Etudier les variations de la suite (u_n) .

Solution :

Avec la méthode n°3 :

$$\text{Soit la fonction } f(x) = \frac{8x-4}{x+1}$$

définie sur $[0; +\infty[$.

f est de la forme $\frac{U}{V}$.

$$f'(x) = \frac{8(x+1) - (8x-4)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{12}{(x+1)^2} \geq 0$$

f est croissante sur $[0; +\infty[$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

Erreurs courantes et astuces diverses :

Il ne faut PAS étudier les variations d'une suite en calculant les premiers termes. Ceci n'est pas une démonstration mais juste une conjecture !

On ne fait surtout PAS de tableau de variations pour une suite. Les flèches des tableaux de variations indiquent la continuité (les suites sont discontinues).

Décalage des indices : $u_{n+1} = 2u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = 2u_{n-1} + 3 \Leftrightarrow u_{n+8} = 2u_{n+7} + 3$. De même, $u_n = 5n + 9 \Leftrightarrow u_{n+1} = 5(n+1) + 9$

Déterminer un seuil :

Soit $u_n = \frac{n+2}{n+1}$, $n \geq 0$. Nous savons que la suite (u_n) est décroissante, que $u_0 = 2$ et que la limite de (u_n) est 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Voici un algorithme écrit en Python :

```
def seuil(a):  
    n=0  
    U=2  
    while U > a:  
        n=n+1  
        U=(n+2)/(n+1)  
    return n
```

- 1) Que permet de faire ce programme ?
- 2) Que renvoie seuil(1,055) ?

Solution :

1) Ce programme permet de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq a$, où a est un nombre choisi par l'utilisateur. En effet, la boucle while continuera tant que $U > a$. La boucle sera « brisée » dès que $u_n \leq a$ et le programme renverra la valeur de n correspondante.

2) Chercher la valeur renvoyée par seuil(1,055) revient à chercher pour quelle valeur de n on a $u_n \leq 1,055$. On cherche cette valeur en utilisant le **tableau de valeur du mode récurrence** de la calculatrice (voir cours).

On obtient :

$$u_{17} \approx 1,0555 \text{ et } u_{18} \approx 1,0526$$

Donc seuil(1,055) renverra la valeur 18.

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Suite arithmétique

Définition par récurrence :

$u_{n+1} = u_n + r$
 r est la **raison** de la suite arithmétique

Prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Expression explicite :

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Somme de termes :

$$S = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Variations :

Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante
 Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante

Remarque :

Les points de la représentation graphique sont alignés.

Suite géométrique

Définition par récurrence :

$u_{n+1} = q \times u_n$
 q est la **raison** de la suite géométrique

Prouver qu'il s'agit d'une suite géométrique :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Expression explicite :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Somme de termes :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Variations :

Pour $u_0 > 0$:
 Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante
 Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante
 Pour $u_0 < 0$:
 Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est décroissante
 Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est croissante

Remarque :

Si $q < 0$, la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante. Elle alterne entre valeurs négatives et valeurs positives.

Déterminer la raison à partir de termes connus :

Suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 5$ et $u_7 = 15$.
 Déterminer la raison de cette suite et calculer u_0 .

Solution :

On utilise l'expression explicite $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $n = 7$ et $p = 3$:

$$u_7 = u_3 + (7-3)r$$

$$u_7 = u_3 + 4r$$

$$r = \frac{u_7 - u_3}{4}$$

$$r = \frac{15 - 5}{4}$$

$$r = \frac{5}{2}$$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 + \frac{5}{2}n$$

pour $n = 3$, on obtient :

$$u_3 = u_0 + \frac{5}{2} \times 3$$

$$5 = u_0 + \frac{15}{2}$$

$$u_0 = 5 - \frac{15}{2} = -\frac{5}{2}$$

Donc $u_n = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}n$

Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_3 = 5$ et $u_6 = 40$.
 Déterminer la raison de cette suite et calculer u_0 .

Solution :

On utilise l'expression explicite $u_n = u_p \times q^{n-p}$ avec $n = 6$ et $p = 3$:

$$u_6 = u_3 \times q^{6-3}$$

$$u_6 = u_3 \times q^3$$

$$q^3 = \frac{u_6}{u_3}$$

$$q^3 = \frac{40}{5}$$

$$q^3 = 8$$

$$q = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ensuite avec la relation

$$u_n = u_0 \times 2^n$$

pour $n = 3$, on obtient :

$$u_3 = u_0 \times 2^3$$

$$5 = u_0 \times 8$$

$$u_0 = \frac{5}{8}$$

Donc $u_n = \frac{5}{8} \times 2^n$

Forme explicite, variation et somme de termes :

Suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

- Déterminer l'expression du terme général u_n et calculer le huitième terme de cette suite.
- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17}$

Solution :

1) (u_n) est la suite arithmétique $u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 2$.
 On utilise la formule $u_n = u_0 + nr$. On a donc $u_n = 2 + 3n$.
 Le huitième terme est le terme de rang $n = 7$.
 $u_7 = 2 + 3 \times 7 = 23$.

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$. $3 > 0$, donc (u_n) est croissante.

3) On utilise la formule :

$$S = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Cela donne :

$$S = 18 \times \frac{u_0 + u_{17}}{2} = 18 \times \frac{2 + 53}{2} = 495$$

Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

- Déterminer l'expression du terme général u_n et calculer le septième terme de cette suite.
- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17}$

Solution :

1) (u_n) est la suite géométrique $u_{n+1} = 2 \times u_n$ avec $u_0 = 3$.
 On utilise la formule $u_n = u_0 \times q^n$. On a donc $u_n = 3 \times 2^n$.
 Le septième terme est le terme de rang $n = 6$.
 $u_6 = 3 \times 2^6 = 192$.

2) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3 > 0$ et de raison $q = 2 > 1$. Donc (u_n) est croissante.

3) On utilise la formule : $S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$.

Cela donne :

$$S = u_0 \times \frac{1 - 2^{18}}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 2^{18}}{1 - 2} = 786429$$

Erreurs courantes et astuces diverses:

Attention, 3×2^n n'est pas égal à 6^n . C'est une erreur fréquente. Il faut laisser l'écriture $u_n = 3 \times 2^n$ telle quelle.

Exercice type avec suite auxiliaire (première → terminale) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

Pour tout entier n , on considère la suite (w_n) définie par : $w_n = u_n - 4000$.

2) Calculer w_0 .

3) **Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison égale à 0,95.**

4) Exprimer w_n en fonction de n .

5) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Solution :

1) $u_1 = 0,95u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9700$

$u_2 = 0,95u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9415$

2) $w_n = u_n - 4000$ donc $w_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$

3) Pour démontrer que (w_n) est géométrique, on calcule $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ qui doit être égal à une constante (la raison de la suite géométrique).

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95$$

On a donc $w_{n+1} = 0,95w_n$. (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

4) On utilise la formule $w_n = w_0 \times q^n$ comme (w_n) est géométrique. On a donc $w_n = 6000 \times 0,95^n$.

5) Enfin, étant donné que $w_n = u_n - 4000$, on a $u_n = w_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Limites de suites définies explicitement

Prérequis : [généralités suites](#) ; [suites arithmétiques et géométriques](#)

Les définitions :

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si **tout** intervalle $]A; +\infty[$, A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si **tout** intervalle $]-\infty; A[$, A réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si **tout** intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. Une telle suite est dite **convergente**.

Limites des suites usuelles :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \text{ (pour } k \geq 1 \text{)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ (pour } k \geq 1 \text{)}$$

Opérations sur les limites et formes indéterminées :

Les tableaux des opérations sur les limites ne sont pas à apprendre par cœur, mais à bien comprendre ! Voici quelques résultats d'opérations (attention à l'abus d'écriture à ne pas écrire sur une copie!) :

$$"(-\infty) \times (-\infty)" \rightarrow +\infty \quad " \frac{0^+}{-\infty} " \rightarrow 0^- \quad " \frac{3}{+\infty} " \rightarrow 0^+ \quad " \frac{+\infty}{0^-} " \rightarrow -\infty \quad " \frac{5}{0^+} " \rightarrow +\infty$$

Les formes indéterminées à connaître par cœur

$$"(+\infty) - (+\infty)" \quad "0 \times \infty" \quad " \frac{\infty}{\infty} " \quad " \frac{0}{0} "$$

2 méthodes pour lever une indétermination : 1) factorisation par les plus hauts degrés 2) méthode du "conjugué"

Limites de q^n :

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n =$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Théorèmes de comparaison et des gendarmes :

Théorème de comparaison (pour des limites infinies) :

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et, à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty .$$

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et, à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty .$$

Théorème des gendarmes (pour des limites finies) :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L , alors (v_n) converge vers L .

Les méthodes – T° spé : Limites de suites définies explicitement

Calculs de limites simples :

1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(-n^3 + 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \text{ donc par quotient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0^+ \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 1) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(-n^3 + 1) = -\infty$$

2) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{4}{n^2 + 5}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 5) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2 + 5} = 0^+$$

3) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = 0,6^n - 5^n$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0 \text{ car } -1 < 0,6 < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n - 5^n = -\infty$$

Lever une indétermination :

1) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n^2 - 3n + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n + 2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = 2n^2 - 3n + 2 = n^2 \left(2 - \frac{3n}{n^2} + \frac{2}{n^2}\right) = n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 2 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{3n+1}{n^2+5}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n+1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2+5 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = \frac{3n+1}{n^2+5} = \frac{n(3 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{5}{n^2})} = \frac{(3 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{5}{n^2})} \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER !!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = 1, \text{ ainsi par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^*$$

3) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = n - \sqrt{n}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = n - \sqrt{n} = n \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{NE PAS OUBLIER DE SIMPLIFIER : } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

4) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = 3^n - 5^n$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = 3^n - 5^n = 5^n \left(\frac{3^n}{5^n} - 1\right) = 5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{3}{5} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right) = -1 \end{array} \right\} \text{ Par produit, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

5) Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n+3} = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, nous avons une forme indéterminée}$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}) \times \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3})} = \frac{(n+1) - (n+3)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}}$$

$$u_n = \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n+3} = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par quotient, nous obtenons finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Utiliser le théorème de comparaison :

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = n^3 + (-1)^n$.

$(-1)^n$ n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de (u_n) directement avec les opérations.

Nous savons que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $n^3 - 1 \leq n^3 + (-1)^n \leq n^3 + 1$. En particulier, $n^3 - 1 < n^3 + (-1)^n$.
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 1 = +\infty$, donc **d'après le théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Utiliser le théorème des gendarmes :

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$.

$\cos(n)$ n'a pas de limite. On ne peut donc pas calculer la limite de (u_n) directement avec les opérations.
Nous savons que $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(n) \leq 1 \\ 1 &\geq -\cos(n) \geq -1 \\ \sqrt{n} + 1 &\geq \sqrt{n} - \cos(n) \geq \sqrt{n} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n} + 1} &\leq \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \text{ car } \sqrt{n} + 1 \geq 0, \sqrt{n} - 1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{n} - \cos(n) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} = 0.$$

Donc **d'après le théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :

Le cours – T° spé : Récurrence et convergence monotone

Prérequis : généralités suites, suites arithm et géométriques, limites de suites

Raisonnement par récurrence :

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- **étape 1 (initialisation) :** $P(n)$ est vraie pour l'entier n_0 ;

- **étape 2 (hérédité) :** pour tout entier $k \geq n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ;

Alors (conclusion) on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans un raisonnement par récurrence, pour démontrer l'hérédité :

On considère un entier k , avec $k \geq n_0$, et on suppose que la propriété est vraie au rang k ($P(k)$ vraie). C'est l'**hypothèse de récurrence**. On démontre alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($P(k+1)$ vraie) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Suite majorée, minorée, bornée :

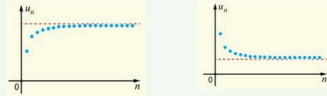
- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est appelé **majorant** de (u_n) .
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. m est appelé **minorant** de (u_n) .
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Soit (u_n) une suite croissante définie sur \mathbb{N} . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L .

Soit (u_n) une suite décroissante définie sur \mathbb{N} . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est minorée par L .

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite **croissante et majorée** alors elle est **convergente**.
- Si une suite **décroissante et minorée** alors elle est **convergente**.



- Si une suite **croissante** est **non majorée** alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite **décroissante** est **non minorée** alors elle tend vers $-\infty$.

Unicité de la limite :

Si la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ est **convergente** de limite L , alors cette limite L est solution de l'équation

$$L = f(L)$$

Les méthodes – T° spé : Récurrence et convergence monotone

Quelques démonstrations par récurrence :

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,3u_n + 7$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que $u_n \leq 10$ pour tout entier naturel n .

Solution :

Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \leq 10$.

Initialisation :

$u_0 = 2 \leq 10$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $u_k \leq 10$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($u_{k+1} \leq 10$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$u_k \leq 10$$

$$0,3 u_k \leq 3$$

$$0,3 u_k + 7 \leq 10$$

$$u_{k+1} \leq 10$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $u_n \leq 10$

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$ et $v_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que $v_n = (n+1)^2$ pour tout entier naturel n .

Solution :

Soit $P(n)$ la propriété : $v_n = (n+1)^2$.

Initialisation :

D'une part, $v_0 = 1$ d'après l'énoncé.

D'autre part, pour $n = 0$, $(n+1)^2 = (0+1)^2 = 1$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $v_k = (k+1)^2$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($v_{k+1} = (k+1+1)^2 = (k+2)^2 = k^2 + 4k + 4$) :

D'après l'énoncé,

$$v_{k+1} = v_k + 2k + 3.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$v_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $v_n = (n+1)^2$

3) Montrer par récurrence que la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n - 3$, est décroissante.

Solution :

Soit $P(n)$ la propriété : $w_{n+1} \leq w_n$ (la suite (w_n) est décroissante).

Initialisation :

D'une part, $w_0 = 1$.

D'autre part, $w_1 = 2w_0 - 3 = 2 - 3 = -1$.

Nous avons donc $w_1 \leq w_0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $w_{k+1} \leq w_k$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($w_{k+2} \leq w_{k+1}$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$w_{k+1} \leq w_k$$

$$2w_{k+1} \leq 2w_k$$

$$2w_{k+1} - 3 \leq 2w_k - 3$$

$$w_{k+2} \leq w_{k+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $w_{n+1} \leq w_n$ et ainsi la suite (w_n) est décroissante

Convergence d'une suite définie par récurrence :

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$ et $u_0 = 1$

- 1) Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 7.
- 2) En déduire que la suite (u_n) est croissante.
- 3) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .
- 4) Calculer la limite L de la suite (u_n) .

Solution :

1) Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \leq 7$ ((u_n) est majorée par 7).

Initialisation :

$u_0 = 1 \leq 7$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $u_k \leq 7$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($u_{k+1} \leq 7$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned} u_k &\leq 7 \\ \frac{1}{3}u_k &\leq \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} &\leq \frac{7}{3} + \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3}u_k + \frac{14}{3} &\leq \frac{21}{3} \\ u_{k+1} &\leq 7 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $u_n \leq 7$

2) Pour étudier la **variation de la suite (u_n)** , nous devons étudier le **signe de $u_{n+1} - u_n$** :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3}$$

Or, nous avons montré au 1) que $u_n \leq 7$, donc :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 7 \\ -\frac{2}{3}u_n &\geq -\frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3} &\geq -\frac{14}{3} + \frac{14}{3} \\ u_{n+1} - u_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc $u_{n+1} \geq u_n$, la suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc la suite (u_n) est convergente.

4) la suite (u_n) étant convergente, on calcule la limite en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3}L + \frac{14}{3} \\ \frac{2}{3}L &= \frac{14}{3} \\ L &= \frac{14}{3} \times \frac{3}{2} = 7 \end{aligned}$$

Nous avons donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.

ATTENTION :
Ce n'est pas parce que la suite est majorée par 7 que sa limite est 7 !

Récurrence et fonction :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$ et la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0,7$.

- 1) Étudier les variations de la fonction f .
- 2) Démontrer que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
- 3) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

Solution :

1) $f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} \geq 0$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$.

2) Soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation :

D'une part $u_0 = 0,7$.

D'autre part $u_1 = f(0,7) = \frac{2,1}{1+1,4} = 0,875$.

Nous avons donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un nombre $k \geq 0$, c'est à dire $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$ (hypothèse de récurrence)

Démontrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$ ($0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$) :

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1 \\ f(0) &\leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1) \text{ car } f \text{ est croissante.} \\ 0 &\leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

3) Nous avons démontré dans la question 2) que la suite (u_n) est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et qu'elle est majorée par 1 ($u_n \leq 1$). Donc la suite (u_n) est convergente. On calcule sa limite en résolvant l'équation $L = f(L)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{3L}{1+2L} \\ L(1+2L) &= 3L \\ 2L^2 - 2L &= 0 \\ L(2L - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $L = 0$ ou $L = 1$.

Comme la suite (u_n) est croissante et que $u_0 = 0,7$, la solution est $L = 1$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Autres méthodes, astuces, notions... rencontrées :