Le cours – T° spé : Loi binomiale

Prérequis : Proba conditionnelles, variables aléatoires, dénombrement

Épreuve de Bernoulli :

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à **deux issues** que l'on peut nommer **"succès"** ou **"échec"**.

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.

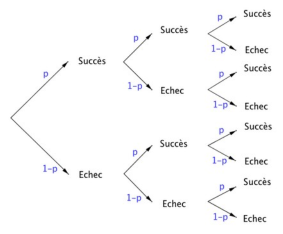
p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

La **variable aléatoire** qui prend la valeur **1** en cas de succès et **0** en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli.

Loi binomiale :

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.



Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, associe **le nombre de succès** au cours de ces n épreuves.
La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**.
On la note $\mathscr{B}(n, p)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$E(X) = n \times p \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Calculatrice :

Taper sur MENU et choisir le menu Statistique et DIST (F5) puis BINOMIAL (F5).

Calculer $P(X=k)$:

Pour calculer $P(X=5)$ sélectionner Bpd (F1) puis dans **Data**, écrire Variable (F2), dans **x** écrire k (ici 5), dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).

Taper sur EXE pour

obtenir : D.P. binomiale p=0.17227918

Calculer $P(X \leqslant k)$:

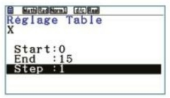
Pour calculer $P(X \leqslant 8)$, sélectionner Bcd (F2) puis dans **Lower**, écrire 0, dans **Upper**, écrire k (ici 8) dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).

Taper sur EXE pour

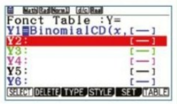
obtenir : D.C. binomiale p=0.87134924

Appuyer sur la touche MENU, sélectionner le menu **Table**, puis suivre les instructions suivantes :

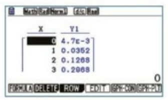
1. Dans **Y1**, saisir **BinomialCD(X,15,0.3)** Suivi de EXE. L'instruction **BinomialCD** se trouve de la façon suivante : **OPTN** puis ▷ F6 puis **STAT** F3 puis **DIST** F3 puis **BINOMINAL** F5 et enfin **Bcd** F2.
2. Choisir **SET** F5, puis entrer la première **Start** et la dernière valeur **End:** de k, ainsi que le pas, suivi de EXE.



3. Choisir **TABL**(touche F6).



4. Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche ↓ du pavé directionnel.



Remarque : pour un tableau des valeurs $P(X=k)$, on utilise l'instruction **BinomialPD(Bpd)**.

Les méthodes – T° spé : Loi binomiale

Calculs de probabilités avec la loi binomiale :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}25$.
1) Calculer $P(X=0)$ et $P(X=7)$.
2) Calculer $P(X \leqslant 1)$ et $P(X \leqslant 6)$.
3) Calculer $P(X > 1)$ et $P(X \geqslant 4)$.
4) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution :

1) $P(X=0) = \binom{10}{0} 0{,}25^0 (1-0{,}25)^{10} = 0{,}75^{10} \approx 0{,}056$.

$P(X=7) = \binom{10}{7} 0{,}25^7 (0{,}75)^3 \approx 0{,}003$ avec la calculatrice : **BinomialPD(7,10,0.25)**

2) $P(X \leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{10}{0} 0{,}25^0 (1-0{,}25)^{10} + \binom{10}{1} 0{,}25^1 (1-0{,}25)^9 \approx 0{,}244$.

$P(X \leqslant 6) \approx 0{,}996$ avec la calculatrice : **BinomialCD(6,10,0.25)**

3) $P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) \approx 0{,}756$.
$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 0{,}224$ avec la calculatrice : **1 - BinomialCD(3,10,0.25)**

4) $E(X) = n \times p = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \times 0{,}25 \times 0{,}75} \approx 1{,}369$

Calcul d'un seuil :

On commande n casques d'une certaine marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. La probabilité qu'un casque présente un défaut de conception est 0,036. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.
1) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2) Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur ou égale à 0,99 ?

Solution :

1) Il y a répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirage avec remise). Le succès est "le casque a un défaut de conception" et sa probabilité est $p = 0{,}036$. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans le lot. Donc X suit bien une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}036$.

2) Nous cherchons n tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

$1 - P(X=0) \geqslant 0{,}99$

$-P(X=0) \geqslant -0{,}01$

$P(X=0) \leqslant 0{,}01$

$\binom{n}{0} 0{,}036^0 (1-0{,}036)^n \leqslant 0{,}01$

$0{,}964^n \leqslant 0{,}01$

$\ln(0{,}964^n) \leqslant \ln(0{,}01)$

$n \times \ln(0{,}964) \leqslant \ln(0{,}01)$

$n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)}$

$n \geqslant 125{,}6$ donc $n \geqslant 126$. Il faut donc commander au minimum 126 casques

Détermination d'un seuil avec la calculatrice :

Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est de 3 %. On prélève un échantillon de 200 gélules. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200.

1) Quelle est la loi suivie par X ?
2) Déterminer le plus petit entier b tel que : $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}9$.

Solution :

1) Il y a répétition de 200 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le succès est "la gélule est non commercialisable" et sa probabilité est $p=0{,}03$. X est la variable aléatoire qui associe le nombre de gélules non commercialisables parmi les 200. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0{,}03$.

2) Avec le menu table de la calculatrice, on obtient : (on tape dans Y1 : **BinomialCD(X,200,0.03)**)

$P(X \leqslant 7)$	0,746
$P(X \leqslant 8)$	0,850
$P(X \leqslant 9)$	0,919

La valeur de b recherchée est donc $b = 9$

Autres méthodes, astuces, notions… rencontrées :